Temporale Logiken

Temporale Logik: Gegenüberstellung

modal	temporal
(G, R)	$(G, <)$ (dabei $<$ stets transitiv und irreflexiv)
Kripke-Rahmen	Zeitstruktur
Kripke-Strukur	temporale Struktur
Welt $g \in G$	Zeitpunkt $t \in G$
$\Box A$	$aif\ A$ (*always in the future*)
$\Diamond A$	$sif\ A$ (*sometimes in the future*)
	$aip\ A$ (*always in the past*)
	$sip\ A$ (*sometimes in the past*)

Temporale Logik

Neue Operatoren

$(\mathcal{K}, t) \models A \; until \; B$	gdw	es gibt $s \in G$ mit $t < s$ und $(\mathcal{K}, s) \models B$ und für alle r mit $t < r < s$ gilt $(\mathcal{K}, r) \models A$
$(\mathcal{K}, t) \models A \; since \; B$	gdw	es gibt $s \in G$ mit $s < t$ und $(\mathcal{K}, s) \models B$ und für alle r mit $s < r < t$ gilt $(\mathcal{K}, r) \models A$

LTL

Syntax:

1. die logischen Konstanten *true* und *false* sind LTL-Formeln,
2. jede aussagenlogische Variable ist eine LTL-Formel,
3. Sind F, G LTL-Formeln, dann auch die aussagenlogischen Kombinationen davon, d.h. $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, etc.,
4. sind F, G LTL-Formeln, dann auch $F \ \mathit{since} \ G$, $F \ \mathit{until} \ G$.

Definierte Operatoren

$$
\begin{aligned}
\mathit{sif}\ A &\leftrightarrow \mathit{true}\ \mathit{until}\ A \\
\mathit{aif}\ A &\leftrightarrow \neg(\mathit{true}\ \mathit{until}\ \neg A) \\
\mathit{sip}\ A &\leftrightarrow \mathit{true}\ \mathit{since}\ A \\
\mathit{aip}\ A &\leftrightarrow \neg(\mathit{true}\ \mathit{since}\ \neg A)
\end{aligned}
$$

Alternative Operatoren

weak *until*

$$(\mathcal{K}, t) \models A \; until_0 \; B$$

gdw

für alle $s \in G$ mit $t < s$ gilt $(\mathcal{K}, s) \models A$

oder

es gibt $s \in G$ mit $t < s$
und $(\mathcal{K}, s) \models B$
und für alle r mit $t < r < s$ gilt $(\mathcal{K}, r) \models A$

Alternative Operatoren

weak *since*

$$(\mathcal{K}, t) \models A \; since_0 \; B$$

gdw

für alle $s \in G$ mit $s < t$ gilt $(\mathcal{K}, s) \models A$

oder

es gibt $s \in G$ mit $s < t$ und $(\mathcal{K}, s) \models B$
und für alle r mit $s < r < t$
gilt $(\mathcal{K}, r) \models A$

Alternative Operatoren

Einbeziehen des gegenwärtigen Zeitpunktes

$(\mathcal{K}, t) \models A \; until^1 \; B$

gdw

es gibt $s \in G$ mit $t \leq s$
und $(\mathcal{K}, s) \models B$
und für alle r mit $t \leq r < s$ gilt $(\mathcal{K}, r) \models A$

(entsprechend für *since*)

Der *next* Operator

In temporalen Strukturen $\mathcal{K}$, die für jeden Zeitpunkt t einen eindeutig bestimmten nächsten Nachfolger $t+1$ besitzen, macht es Sinn einen next-Operator, häufig auch mit $\bigcirc$ bezeichnet, einzuführen.

$$(\mathcal{K}, t) \models \bigcirc A \text{ gdw } (\mathcal{K}, t+1) \models A$$

Es gilt die Äquivalenz

$$\bigcirc A \leftrightarrow \mathit{false\ until}\ A.$$

Bemerkung:

Mit until^1 anstelle von *until* funtioniert diese Definition nicht.

Tautologien

1. $C\ \mathit{until}\ (A \vee B) \leftrightarrow (C\ \mathit{until}\ A) \vee (C\ \mathit{until}\ B)$

2. $C\ \mathit{since}\ (A \vee B) \leftrightarrow (C\ \mathit{since}\ A) \vee (C\ \mathit{since}\ B)$

3. $(B \wedge C)\ \mathit{until}\ A \leftrightarrow (B\ \mathit{until}\ A) \wedge (C\ \mathit{until}\ A)$

4. $(B \wedge C)\ \mathit{since}\ A \leftrightarrow (B\ \mathit{since}\ A) \wedge (C\ \mathit{since}\ A)$

Grenzen der Ausdruckstärke von LTL

Sei p eine aussagenlogische Variable.

Für $m \geq 2$ kann die Aussage

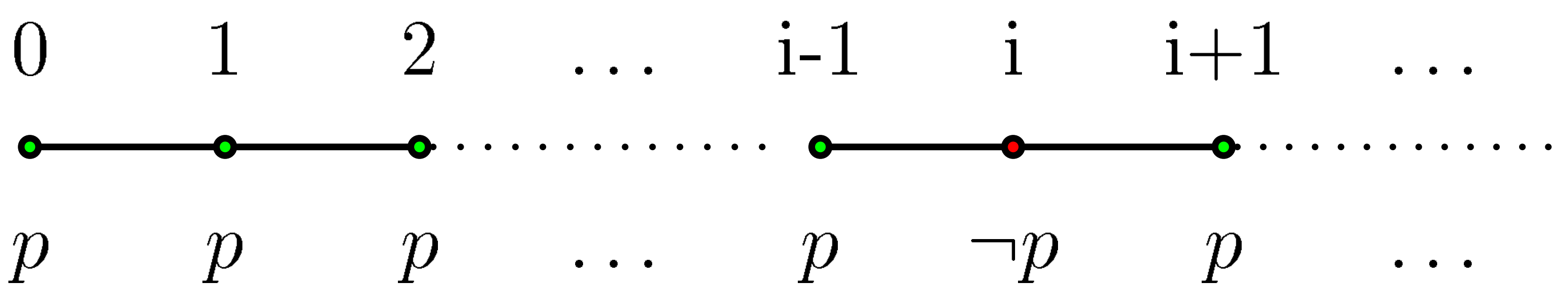
> Für jeden Zeitpunkt i mit $i = km$, $k \geq 0$, gilt p

durch keine LTL-Formel beschrieben werden.

Die Zeitstrukturen $\mathcal{K}_i$

Mit $\mathcal{K}_i = (\mathbb{N}, <, v_i)$ bezeichnen wir die temporale Struktur mit:

$$v_i(p,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq i \\ 0 & \text{falls } t = i+1 \\ 1 & \text{falls } t > i+i \end{cases}$$



Lemma

Sei A eine beliebige LTL-Formel und n die Anzahl der Vorkommen des *until*-Operators in A. Dann gilt entweder

$$(\mathcal{K}_i, 0) \models A \text{ für alle } i \geq n+1$$

oder

$$(\mathcal{K}_i, 0) \models \neg A \text{ für alle } i \geq n+1$$

Mit anderen Worten für $i > n$ hängt $(\mathcal{K}_i, 0) \models A$ nicht von i ab.

Vorbereitungen zum Beweis

Für jede diskrete Zeitstruktur $\mathcal{K}$, und jeden Zeitpunkt z darin gilt:

$(\mathcal{K}, z) \models B \mathit{until} C \Leftrightarrow (\mathcal{K}, z+1) \models C$ oder $((\mathcal{K}, z+1) \models B \wedge (B \mathit{until} C)$

Für $0 \leq t \leq n$, $i > n$ und und beliebige Formeln F gilt:

$$(\mathcal{K}_i, t) \models F \text{ gdw } (\mathcal{K}_{i-t}, 0) \models F$$

Übersetzung in PL1

Die Übersetzung

$$\mu : \text{ LTL-Formeln}(V) \rightarrow \text{ PL1}(V_{temp})$$

wird definiert durch:

1. $\mu(t) = A(x) \vee \neg A(x)$ und $\mu(f) = A(x) \wedge \neg A(x)$ für eine beliebiges qeinstelliges Prädikat $A(x)$,
2. $\mu(A) = A(x)$ für jede Aussagenvariable A,
3. $\mu(\neg F) = \neg\mu(F)$, $\mu(F \vee G) = \mu(F) \vee \mu(G)$, $\mu(F \wedge G) = \mu(F) \wedge \mu(G)$, etc. ,
4. $\mu(F \; since \; G) = \exists y(y < x \wedge \mu(G)(y) \wedge \forall z(y < z < x \rightarrow \mu(F)(z)))$
5. $\mu(F \; until \; G) = \exists y(x < y \wedge \mu(G)(y) \wedge \forall z(x < z < y \rightarrow \mu(F)(z)))$.

Übersetzungslemma

Für $\mathcal{K} = (G, <, v)$ sei $\mathcal{K}_{temp}$ die PL1 Strukur, die $(G, <)$ unverändert übernimmt und in der die einstellige Relation $A(s)$ genau dann wahr ist, wenn $v(s, A) = 1$ gilt. Dann gilt für alle LTL-Formeln F und alle $t \in G$

$$(\mathcal{K}, t) \models F \Leftrightarrow \mathcal{K}_{temp} \models \mu(F)[t]$$

Definitionsvollständigkeit

Definition:
Sei $\mathcal{M}$ eine Klasse von Zeitstrukturen.
LTL heißt definitionsvollständig bzgl. $\mathcal{M}$, wenn für jede prädikatenlogische V_{temp}-Formel $F(x)$ mit genau einer freien Variablen eine LTL-Formel A existiert, so daß für alle $(G,<) \in \mathcal{M}$ und alle Bewertungsfuntionen v gilt:

$$(G,<,v)_{temp} \models \forall x(\mu(A) \leftrightarrow F(x))$$

Theorem

1. LTL ist definitionsvollständig für die Zeitstruktur $(\mathbb{Z}, <)$ der ganzen Zahlen.
2. LTL ist definitionsvollständig für die Zeitstruktur $(\mathbb{R}, <)$ der reellen Zahlen.
3. LTL ist nicht definitionsvollständig für die Zeitstruktur $(\mathbb{Q}, <)$ der rationalen Zahlen.
4. LTL ist nicht definitionsvollständig für die Klasse aller linearer Zeitstrukturen, $\mathcal{M}_{lin}$.

Beweis: Die Beweise sind zum Teil sehr kompliziert. Die beste Referenz dafür ist das Handbuch von Gabbay et al. Die Pionierarbeit auf dem Gebiet der Definierbarkeit temporaler Operatoren stammt von Hans Kamp aus dem Jahr 1968.