Funktionale Vollständigkeit

Funktionale Vollständigkeit

Definition:

Eine mehrwertige Logik $\mathcal{L}$ mit M als Menge der Wahrheitswerte heißt funktional vollständig, wenn zu jeder Funktion $g : M^n \rightarrow M$ eine aussagenlogische Formel A in $\mathcal{L}$ existiert mit $g = f(A)$.

Dabei ist $f(A)$ definiert durch:
$f(A)(w_1, \ldots, w_n)$ ist der Wahrheitswert der Formel A, wenn die aussagenlogischen Variablen mit den Wahrheitswerten $w_1, \ldots, w_n$ belegt sind.

$\mathcal{L}_3$ und Funktionale Vollständigkeit

$\mathcal{L}_3$ ist nicht funktional vollständig.

$\mathcal{L}_3^+$ entsteht aus $\mathcal{L}_3$ durch Hinzunahme einer aussagenlogischen Konstanten u, die stets den Wahrheitswert u annimmt.

Lemma:

Die Logik $\mathcal{L}_3^+$ ist **funktional vollständig**.

Beweis des Lemmas

Sei $g : \{1, u, 0\}^n \to \{1, u, 0\}$ gegeben.

Die Konstruktion der gesuchten aussagenlogischen Formel A geschieht durch Induktion über n.

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Hierbei wird die Existenz der aussagenlogischen Konstanten u und Darstellbarkeit von 0 und 1 benutzt.

Im Induktionsschritt von $n-1$ nach n gibt es nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{L}_3^+$-Formeln A_0, A_u und A_1 mit:

$$\begin{aligned}
f(A_0)(w_1, \ldots, w_{n-1}) &= g(w_1, \ldots, w_{n-1}, 0) \\
f(A_u)(w_1, \ldots, w_{n-1}) &= g(w_1, \ldots, w_{n-1}, u) \\
f(A_1)(w_1, \ldots, w_{n-1}) &= g(w_1, \ldots, w_{n-1}, 1)
\end{aligned}$$

Hilfsformeln

Wir benötigen die folgenden Hilfsformeln:

$$\begin{aligned} H_0 &= \sim\sim\neg w_n \\ H_u &= \sim w_n \wedge \sim\neg w_n \\ H_1 &= \sim\sim w_n \end{aligned}$$

Wahrheitstafel für die Hilfsformeln

w_n	H_1	H_u	H_0
1	1	0	0
u	0	1	0
0	0	0	1

Beweis des Lemmas (Forts.)

Setzt man

$$A = (A_0 \wedge H_0) \vee (A_u \wedge H_u) \vee (A_1 \wedge H_1),$$

so erhält man $f(A) = g$.

Beispiel 1

Gegeben zweistellige Funktion g durch:

g	1	u	0
1	0	u	0
u	u	u	u
0	0	u	0

Man erhält leicht:

$$\begin{aligned} g(A,1) &= f(A \wedge \neg A) \\ g(A,u) &= u \\ g(A,0) &= f(A \wedge \neg A) \end{aligned}$$

Beispiel 1 (Fortsetzung)

Somit ergibt sich nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} g(A,B) = f(\ & (A \wedge \neg A \wedge && \sim\sim B) \vee \\ & (u \wedge && \sim B \wedge \sim\neg B) \vee \\ & (A \wedge \neg A \wedge && \sim\sim\neg B)\ ) \end{aligned}$$

Vereinfachungen liefern

$$g(A,B) = f(\ (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)\ )$$

Beispiel 2

Gegeben zweistellige Funktion $\wedge_B$ durch

$\wedge_B$	1	u	0
1	1	u	0
u	u	u	u
0	0	u	0

(Bochvars Konjunktion)

Beispiel 2 (Fortsetzung)

Man erhält nach dem Konstruktionsverfahren:

$$\begin{array}{lllll} A \wedge_B B & \text{id} & ((\neg A \wedge A) \wedge & (\sim\sim\neg B)) \vee \\ & & (u \wedge & (\sim B \wedge \sim\neg B)) \vee \\ & & (A \wedge & (\sim\sim B)) \end{array}$$

Vereinfachungen führen zu:

$$A \wedge_B B \quad \text{id} \quad (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)$$

Einfaches Kriterium

Eine m-wertige Logik, in der die Funktionen

- $\min(x, y)$
- $\max(x, y)$
- $J_k(x)$ für $0 \leq k < m$
- alle konstanten Funktionen $c_k^n(x_1, \ldots, x_n) = k$
  für $n \geq 1$ und jeden Wahrheitswert k, $0 \leq k < m$

definierbar sind, ist funktional vollständig.

Einfaches Kriterium

Eine m-wertige Logik, in der die Funktionen

- $\min(x, y)$
- $\max(x, y)$
- $J_k(x)$ für $0 \leq k < m$
- alle konstanten Funktionen $c_k^n(x_1, \ldots, x_n) = k$ für $n \geq 1$ und jeden Wahrheitswert k, $0 \leq k < m$

definierbar sind, ist funktional vollständig.

Beweis:
Sei $g(\bar{x}) : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$ gegeben

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_n) &= \max\{\min(c^n_{g(\bar{a})}, J_{a_1}(x_1), \ldots, J_{a_n}(x_n)) \\ &\qquad \mid \bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M}^n\} \end{aligned}$$