

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül:** Testet auf Unerfüllbarkeit
- **Beweis durch Fallunterscheidung**

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- **Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit**
- **Beweis durch Fallunterscheidung**
- **Top-down-Analyse der gegebenen Formeln**

Der aussagenlogische Tableaunkalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- Mehr als eine Regel

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das Tableau

des Tableaus (Gen.)

die Tableaus (pl.)

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das Tableau

des Tableaus (Gen.)

die Tableaus (pl.)

der Tableauealkül (*nicht* das)

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das Tableau

des Tableaus (Gen.)

die Tableaus (pl.)

der Tableakkül (*nicht* das)

Englisch

the tableau (sing.)

the tableaux (pl.)

the tableau calculus

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$

- $A \wedge B$

- $\neg(A \vee B)$

- $\neg(A \rightarrow B)$

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \rightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(A \wedge B)$
- $A \vee B$
- $A \rightarrow B$

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

Zur Erinnerung: Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$A \wedge B$	A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	A	B
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	B
$\neg\neg A$	A	A			

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaunkalküls

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \text{konjunktiv} \quad \frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

$$\alpha$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_2$$

konjunktiv

$$p \wedge q$$

|
 p

|
 q

$$\beta$$

$$\beta_1 \mid \beta_2$$

disjunktiv

$$p \vee q$$

/
 p

\
 q

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\begin{array}{c}
 \alpha \\
 \hline
 \alpha_1 \\
 \alpha_2
 \end{array}
 \quad
 \text{konjunktiv}
 \quad
 \begin{array}{c}
 p \wedge q \\
 | \\
 p \quad | \quad q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \beta \\
 \hline
 \beta_1 \quad | \quad \beta_2
 \end{array}
 \quad
 \text{disjunktiv}
 \quad
 \begin{array}{c}
 p \vee q \\
 / \quad \backslash \\
 p \quad q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 F \\
 \neg F \\
 \hline
 *
 \end{array}
 \quad
 \text{Widerspruch}
 \quad
 \begin{array}{c}
 F \quad | \quad \neg F \\
 | \\
 *
 \end{array}$$

Instanzen der α - und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

$$P$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$

$$\neg P$$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$

$$P$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

$$P$$

$$Q$$

$$\neg Q$$

$$\neg Q$$

Instanzen der α - und β -Regel

Instanzen der α -Regel

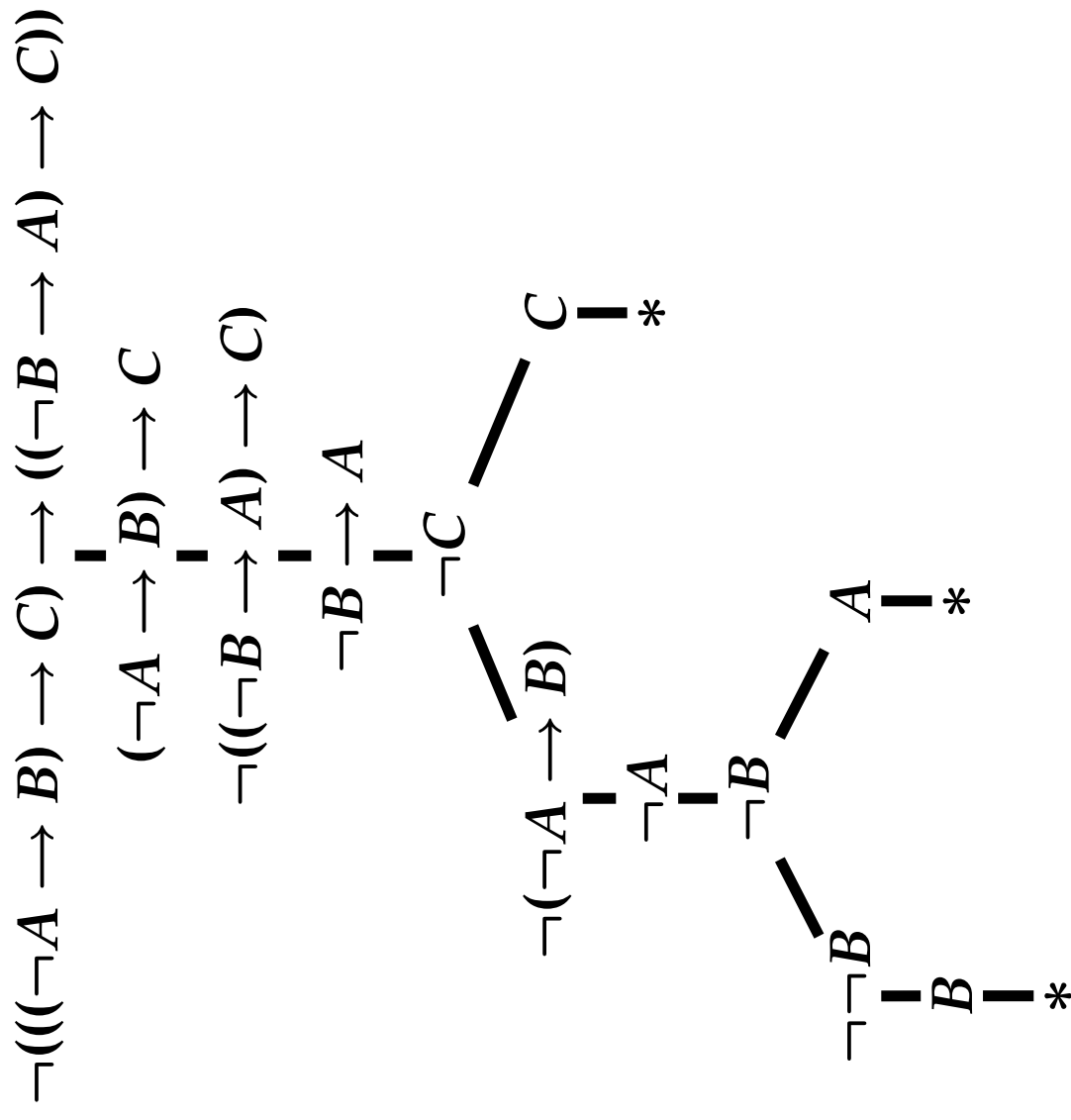
$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

$$Q \qquad \neg Q \qquad \neg Q$$

Instanzen der β -Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Beispiel



Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „ α vor β “

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „ α vor β “

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in Einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

• T ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B \cup M$$

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

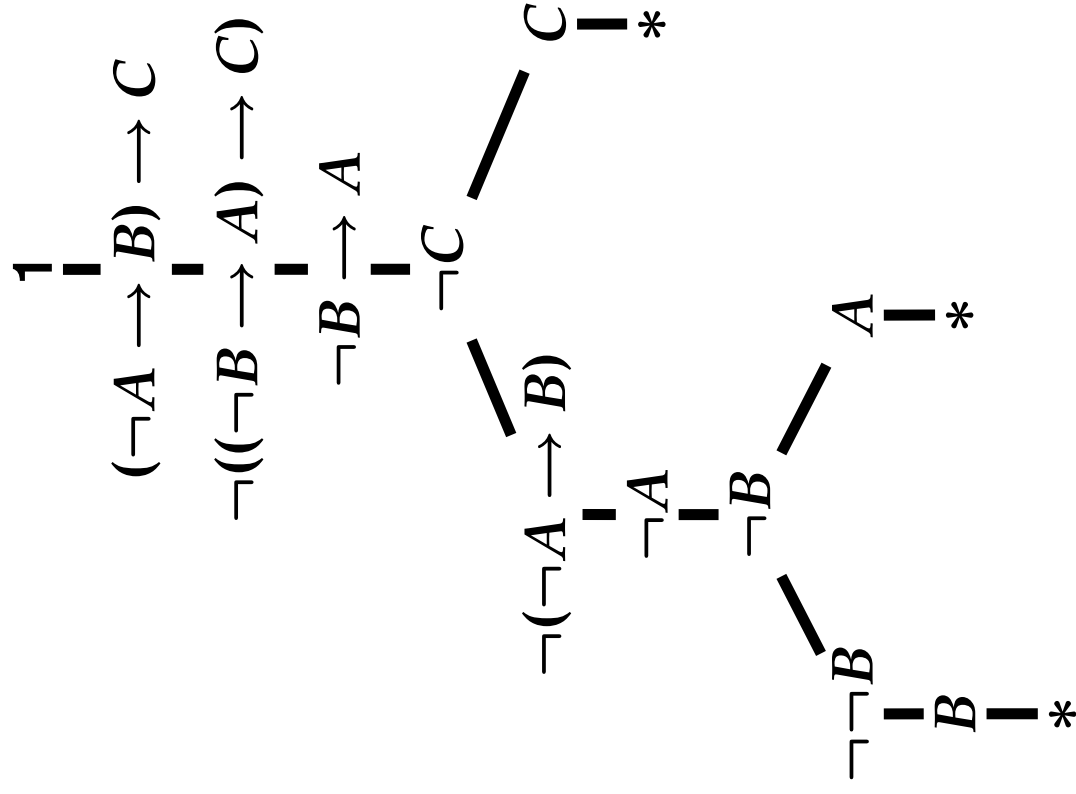
Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für M , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel: Nun formal richtig

$$M = \neg(((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C))$$



Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Also

Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Lemma

B offener Ast in voll expandiertem Tableau, dann $B \cup M$ erfüllbar

Also

Voll expandierte Tableau für unerfüllbares *M* ist geschlossen