

# Kalküle

# Ein 1. Axiomatisierungsergebnis

**Satz:** [M. Wajsberg 1931]

Sei  $\mathcal{L}_{\text{Łukas}}^3$  die Aussagenlogik mit den Konnektoren

- $\neg$  (starke Negation) und
- $\Rightarrow$  (Łukasiewicz Implikation).

Mit der Modus-ponens-Regel bilden folgenden Axiome eine vollständige und korrekte Axiomatisierung für  $\mathcal{L}_{\text{Łukas}}^3$ :

1.  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
2.  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3.  $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
4.  $((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

# Łukasiewicz Implikation $\Rightarrow$

| $A \Rightarrow B$            |     |     |   |
|------------------------------|-----|-----|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | 1   | $u$ | 0 |
| 1                            | 1   | 1   | 1 |
| $u$                          | $u$ | 1   | 1 |
| 0                            | 0   | $u$ | 1 |

Zum Vergleich die schwache ( $\supset$ ) und die starke ( $\rightarrow$ ) Implikation.

| $\supset$ | 1   | $u$ | 0 |
|-----------|-----|-----|---|
| 1         | 1   | 1   | 1 |
| $u$       | $u$ | 1   | 1 |
| 0         | 0   | 1   | 1 |

| $\rightarrow$ | 1   | $u$ | 0 |
|---------------|-----|-----|---|
| 1             | 1   | 1   | 1 |
| $u$           | $u$ | $u$ | 1 |
| 0             | 0   | $u$ | 1 |

# Vorzeichenformeln

## Definition

Ist  $\mathcal{L}$  eine beliebige mehrwertige Logik mit  $M$  als Menge der Wahrheitswerte, so ist eine Vorzeichenformel für  $\mathcal{L}$  von der Form

$$S \ A$$

wobei  $A$  eine Formel in  $\mathcal{L}$  ist und  $S$  eine nichtleere Teilmenge von  $M$ .

Eine Vorzeichenformel ohne freie Variablen  $S \ A$  ist in einer  $\mathcal{L}_3$ -Struktur  $(\mathcal{M}, v)$  gültig, wenn der Wahrheitswert von  $A$  in  $S$  liegt.

In Zeichen:

$$(\mathcal{M}, v) \models S \ A, \text{ genau dann, wenn } v(A) \in S.$$

# Allgemeine Form einer Tableaurege

Zu jedem Vorzeichen  $\emptyset \neq S \subseteq M$  und jedem aussagenlogischen Operator  $\circ$  gibt es eine Tableauregel.

Sei nun  $\circ$  ein  $n$ -stelliger Operator, für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .

Die zugehörige Tableauregel hat dann die Form

$$\frac{S \circ (A_1, \dots, A_n)}{T(A_1, \dots, A_n)}$$

wobei  $T(A_1, \dots, A_n)$  ein endliches erweitertes Tableau ist, in dem nur Vorzeichenformeln der Form  $S'_i A_i$  auftreten.

Die Zweige des Tableaus  $T(A_1, \dots, A_n)$  nennt man die Extensionen der Regel.

# Beispiel einer Tableauregel

Eine Tableauregel aus der 5-wertigen Łukasiewicz Logik mit der Wahrheitswertemenge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ :

$$\{4\}(p \Rightarrow q)$$

|          |                   |                |                   |          |
|----------|-------------------|----------------|-------------------|----------|
| $\{0\}p$ | $\{0, 1\}p$       | $\{0, 1, 2\}p$ | $\{0, 1, 2, 3\}p$ |          |
|          | $\{1, 2, 3, 4\}q$ | $\{2, 3, 4\}q$ | $\{3, 4\}q$       | $\{4\}q$ |

# Kalkül: Vorzeichen

Sei

$$V \subseteq 2^M$$

die Menge der Vorzeichen, die in einem Kalkül für die Logik  $\mathcal{L}$  mit der Menge  $M$  von Wahrheitswerten verwendet werden.

Im allgemeinen werden **nicht** alle möglichen Vorzeichen im Kalkül verwendet, d.h.

$$V \neq 2^M$$

Daß initiale Vorzeichen muß immer enthalten sein:

$$(M \setminus D) \in V$$

# Kalkül: Korrektheit

Korrektheit erfordert (1):

Für jede Regel mit Prämisse  $S(A \circ B)$  und Extensionen  $E_1, \dots, E_k$ , wobei

$$E_i = \{S_{ij}C_{ij} \mid C_{ij} \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq k, j \leq 2\}$$

gilt für jede Belegung  $v$ :

wenn  $v(A \circ B) \in S$

dann gibt es ein  $i$ , so daß für alle  $j$  gilt  $v(C_{ij}) \in S_{ij}$ .

Es genügt dabei  $A$  und  $B$  als aussagenlogische Variablen zu betrachten.



# Kalkül: Korrektheit

Korrektheit erfordert (2):

Für jedes Vorzeichen  $S \in V$  und jeden Operator  $\circ$  der Logik  $\mathcal{L}$ :

Wenn es keine Regel mit Prämisse  $S(A \circ B)$  gibt,  
dann ist  $S(A \circ B)$  unerfüllbar, d.h.  
für alle Belegungen  $v$  gilt

$$v(A \circ B) \notin S$$

# Kalkül: Vollständigkeit

Vollständigkeit erfordert:

Für jedes Vorzeichen  $S \in V$  und jeden Operator  $\circ$  der Logik  $\mathcal{L}$ :  
Falls  $S(A \circ B)$  erfüllbar ist, d.h., falls es eine Belegung  $v$  gibt mit

$$v(A \circ B) \in S$$

dann gibt es eine Regel mit Prämisse  $S(A \circ B)$  und Extensionen  $E_1, \dots, E_k$ , wobei

$$E_i = \{S_{ij}C_{ij} \mid C_{ij} \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq k, j \leq 2\}$$

so daß für jede Belegung  $v$  gilt:

wenn es ein  $i$  gibt, so daß für alle  $j$  gilt  $v(C_{ij}) \in S_{ij}$   
dann  $v(A \circ B) \in S$ .

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\wedge$

$$\frac{\{T\}A \wedge B}{\{T\}A}$$
$$\{T\}B$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\wedge$

$$\frac{\{T\}A \wedge B}{\{T\}A \quad \{T\}B}$$

$$\frac{\{U\}A \wedge B}{\begin{array}{c|c|c} \{U\}A & \{U\}B & \{U\}A \\ \{T\}B & \{T\}A & \{U\}B \end{array}}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\wedge$

$$\frac{\{T\}A \wedge B}{\{T\}A \quad \{T\}B}$$

$$\frac{\{U\}A \wedge B}{\begin{array}{c|c|c} \{U\}A & \{U\}B & \{U\}A \\ \{T\}B & \{T\}A & \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \wedge B}{\{F\}A \mid \{F\}B}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\wedge$

$$\frac{\{T\}A \wedge B}{\{T\}A}$$

$$\{T\}B$$

$$\frac{\{U\}A \wedge B}{\begin{array}{c|c|c} \{U\}A & \{U\}B & \{U\}A \\ \{T\}B & \{T\}A & \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \wedge B}{\{F\}A \mid \{F\}B}$$

$$\frac{\{U, F\}A \wedge B}{\{U, F\}A \mid \{U, F\}B}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\vee$

$$\frac{\{T\}A \vee B}{\{T\}A \mid \{T\}B}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\vee$

$$\frac{\{T\}A \vee B}{\{T\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{U\}A \vee B}{\begin{array}{c|c} \{U, F\}A & \{U\}A \\ \{U\}B & \{U, F\}B \end{array}}$$



# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\vee$

$$\frac{\{T\}A \vee B}{\{T\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{U\}A \vee B}{\begin{array}{c|c} \{U, F\}A & \{U\}A \\ \{U\}B & \{U, F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \vee B}{\begin{array}{c} \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\vee$

$$\frac{\{T\}A \vee B}{\{T\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{U\}A \vee B}{\begin{array}{c|c} \{U, F\}A & \{U\}A \\ \{U\}B & \{U, F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \vee B}{\begin{array}{c} \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U, F\}A \vee B}{\begin{array}{c} \{U, F\}A \\ \{U, F\}B \end{array}}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\sim$ und $\neg$

$$\frac{\{T\} \sim A}{\{U, F\}A}$$

$$\frac{\{F\} \sim A}{\{T\}A}$$

$$\frac{\{U\} \sim A}{\{T\}A}$$

$$\frac{\{U, F\} \sim A}{\{T\}A}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\sim$ und $\neg$

$$\frac{\{T\} \sim A}{\{U, F\} A}$$

$$\frac{\{F\} \sim A}{\{T\} A}$$

$$\frac{\{U\} \sim A}{\{T\} A}$$

$$\frac{\{U, F\} \sim A}{\{T\} A}$$

$$\frac{\{T\} \neg A}{\{F\} A}$$

$$\frac{\{F\} \neg A}{\{T\} A}$$

$$\frac{\{U\} \neg A}{\{U\} A}$$

$$\frac{\{U, F\} \neg A}{\{T\} A \mid \{U\} A}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\supset$

$$\frac{\{T\}A \supset B}{\{U, F\}A \mid \{T\}B}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\supset$

$$\frac{\{T\}A \supset B}{\{U, F\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{F\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\supset$

$$\frac{\{T\}A \supset B}{\{U, F\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{F\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\supset$

$$\frac{\{T\}A \supset B}{\{U, F\}A \mid \{T\}B}$$

$$\frac{\{F\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U, F\}A \supset B}{\begin{array}{l} \{T\}A \\ \{U, F\}B \end{array}}$$



# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\exists$

$$\frac{\{T\}\exists x A(x)}{\{T\}A(f(y_1, \dots, y_k))}$$

$$\frac{\{F\}\exists x A(x)}{\{F\}A(z)}$$

$$\frac{\{U\}\exists x A(x)}{\begin{array}{c} \{U\}A(f(y_1, \dots, y_k)) \\ \{U, F\}A(z) \end{array}}$$

$$\frac{\{U, F\}\exists x A(x)}{\{U, F\}A(z)}$$

- $z$  eine neue Variable
- $y_1, \dots, y_k$  die freien Variablen  $\exists x A(x)$
- $f$  ein neues  $k$ -stelliges Funktionszeichen.

# $\mathcal{L}_3$ -Tableauregeln für $\forall$

$$\frac{\{T\}\forall x A(x)}{\{T\}A(z)}$$

$$\frac{\{F\}\forall x A(x)}{\{F\}A(f(y_1, \dots, y_k))}$$

$$\frac{\{U\}\forall x A(x)}{\begin{array}{l} \{U\}A(f(y_1, \dots, y_k)) \\ \{U, F\}\neg A(z) \end{array}}$$

$$\frac{\{U, F\}\forall x A(x)}{\{U, F\}A(f(y_1, \dots, y_k))}$$

- $z$  eine neue Variable
- $y_1, \dots, y_k$  die freien Variablen in  $\forall x A(x)$
- $f$  ein neues  $k$ -stelliges Funktionszeichen.

# Tableaus

## Definition

Ein **Tableau** für eine endliche Menge  $\Sigma$  signierter Formeln wird folgendermaßen konstruiert:

1. Ein linearer Baum, in dem jede Formel aus  $\Sigma$  genau einmal vorkommt, ist ein Tableau für  $\Sigma$ .
2. Sei  $T$  ein Tableau für  $\Sigma$  und  $B$  ein Zweig in  $T$ , der eine signierte Formel  $SA$  enthält. Weiterhin gebe es eine Tableauregel  $R$  mit Prämisse  $SA$ . Sind  $E_1, \dots, E_n$  die Extensionen von  $R$  (unter Berücksichtigung der genannten Einschränkungen, falls  $R$  eine Quantorenregel ist), so wird  $T$  am Ende von  $B$  um  $n$  lineare Unterbäume erweitert, die jeweils die signierten Formeln aus den  $E_i$  in beliebiger Reihenfolge enthalten. Der so entstehende Baum ist wieder ein Tableau für  $\Sigma$ .

# Geschlossene Tableaus

## Definition

Ein Zweig  $B$  eines Tableau ist **geschlossen**, falls gilt:

- $B$  enthält **komplementäre** Formeln, d.h. es gibt eine Substitution  $\sigma$  und signierte Formeln  $S_1 A_1, \dots, S_k A_k$  auf  $B$ , so daß  $S_1 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$  und  $\sigma(A_1) = \dots = \sigma(A_k)$  oder

# Geschlossene Tableaus

## Definition

Ein Zweig  $B$  eines Tableau ist **geschlossen**, falls gilt:

- $B$  enthält **komplementäre** Formeln, d.h. es gibt eine Substitution  $\sigma$  und signierte Formeln  $S_1 A_1, \dots, S_k A_k$  auf  $B$ , so daß  $S_1 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$  und  $\sigma(A_1) = \dots = \sigma(A_k)$  oder
- $B$  enthält eine signierte Formel  $SA$ , auf die keine Regel anwendbar ist und  $A$  ist nicht atomar.

# Geschlossene Tableaus

## Definition

Ein Zweig  $B$  eines Tableau ist **geschlossen**, falls gilt:

- $B$  enthält **komplementäre** Formeln, d.h. es gibt eine Substitution  $\sigma$  und signierte Formeln  $S_1 A_1, \dots, S_k A_k$  auf  $B$ , so daß  $S_1 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$  und  $\sigma(A_1) = \dots = \sigma(A_k)$  oder
- $B$  enthält eine signierte Formel  $SA$ , auf die keine Regel anwendbar ist und  $A$  ist nicht atomar.

Ein Zweig, der nicht geschlossen ist, heißt **offen**.

# Geschlossene Tableaus

## Definition

Ein Zweig  $B$  eines Tableau ist **geschlossen**, falls gilt:

- $B$  enthält **komplementäre** Formeln, d.h. es gibt eine Substitution  $\sigma$  und signierte Formeln  $S_1 A_1, \dots, S_k A_k$  auf  $B$ , so daß  $S_1 \cap \dots \cap S_k = \emptyset$  und  $\sigma(A_1) = \dots = \sigma(A_k)$  oder
- $B$  enthält eine signierte Formel  $SA$ , auf die keine Regel anwendbar ist und  $A$  ist nicht atomar.

Ein Zweig, der nicht geschlossen ist, heißt **offen**.

Ein Tableau heißt **geschlossen**, falls jeder Zweig darin **mit derselben Substitution** geschlossen ist, sonst heißt es **offen**.

# Erfüllbarkeit von Tableaus

## Definition

Sei  $T$  ein Tableau für die Logik  $\mathcal{L}$ , in dem die freien Variablen

$$\bar{y} = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$$

auftreten.

$T$  heißt **erfüllbar**, wenn es eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $(\mathcal{M}, v)$  gibt, so daß für jedes  $k$ -Tupel

$$\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$$

von Elementen aus  $\mathcal{M}$  mindestens ein Pfad  $P$  in  $T$  existiert, so daß für alle signierten Formeln  $B$  auf  $P$

$$(\mathcal{M}, v), (\bar{a}/\bar{y}) \models B$$

gilt.



# Korrektheit Tableaukalküls

## Lemma

Ein erfüllbares Tableau ist nicht geschlossen.

# Korrektheit Tableaukalküls

## Lemma

Ein erfüllbares Tableau ist nicht geschlossen.

## Lemma

Sei  $T$  ein endliches erfüllbares Tableau und  $T_1$  entstehe aus  $T$  durch eine Regelanwendung, dann ist auch  $T_1$  erfüllbar.

# Korrektheit Tableaukalküls

## Lemma

Ein erfüllbares Tableau ist nicht geschlossen.

## Lemma

Sei  $T$  ein endliches erfüllbares Tableau und  $T_1$  entstehe aus  $T$  durch eine Regelanwendung, dann ist auch  $T_1$  erfüllbar.

## Satz

Ein Tableau für eine erfüllbare Menge signierter Formeln ist nicht geschlossen.

# Korrektheit des Tableaukalküls

## Korrektheitssatz für $\mathcal{L}_3$

Sei  $A$  eine  $\mathcal{L}_3$ -Formel ohne freie Variablen.

Falls es ein geschlossenes Tableau  $T$  für  $\{U, F\}A$  gibt, dann ist  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Tautologie.

## Korollar

Sei  $\Sigma$  eine Menge von  $\mathcal{L}_3$ -Formeln ohne freie Variablen und  $A$  eine weitere Formel dieser Art.

Falls es ein geschlossenes Tableau über

$$\{\{T\}B \mid B \in \Sigma\} \cup \{\{U, F\}A\}$$

gibt,  
dann gilt

$$\Sigma \vdash_3 A.$$

# Vollständigkeit des Tableaukalküls

## Definition

Eine Folge von Regelanwendungen heißt **systematisch**, wenn auf jedem offenen Zweig  $B$  des entstehenden Tableaus  $T$

1. für jede signierte Formel  $SC$  auf  $B$ , die nicht atomar ist, die entsprechende Tableauregel angewandt wird
2. für jede Formel der Form

$$\{T\}\forall xA, \{U\}\forall xA, \{F\}\exists xA, \{U\}\exists xA, \{U, F\}\exists xA$$

die auf  $B$  vorkommt, unendlich oft die zugehörige Regel anwendet wird.

# Vollständigkeit des Tableaukalküls

## Vollständigkeitssatz für $\mathcal{L}_3$

Sei  $A$  eine  $\mathcal{L}_3$ -Tautologie.

Dann enthält jede Folge von systematisch konstruierten Tableaus mit Wurzel  $\{U, F\}A$  ein geschlossenes Tableau.

# Beweis des Vollständigkeitssatzes

Angenommen die Aussage des Satzes sei falsch.

Dann gibt es ein durch eine systematische Folge von Regelanwendungen approximiertes unendliches bzw. erschöpftes Tableau  $T$  mit Wurzel  $\{U, F\}A$ , das einen offenen Zweig  $P$  enthält.

Sei  $H_0$  die Menge aller signierten Formeln, die auf  $P$  vorkommen. Insbesondere  $\{U, F\}A \in H_0$ .

# Beweis des Vollständigkeitssatzes

Da  $T$  systematisch konstruiert ist, kommt für jede Formel  $B(z)$  in  $H_0$ , die Formel  $B(z_i)$  für unendlich viele verschiedene Variablen  $z_i$  ebenfalls in  $H_0$  vor.

Die Formelmenge  $H$  entstehe aus  $H_0$ , indem jede freie Variable in  $H_0$  durch einen variablenfreien Term ersetzt wird. Da es nur abzählbar unendlich viele Terme gibt, kann der Ersetzungsprozeß so eingerichtet werden, daß für jede Formel  $B(z^1, \dots, z^k)$  in  $H_0$ , für jedes  $k$ -Tupel variablenfreier Terme  $t^1, \dots, t^k$  die Formel  $B(t^1, \dots, t^k)$  in  $H$  liegt.



# Eigenschaften von $H$ (allgemein)

Für jede allgemeine Tableauregel

$$\frac{S \circ (A_1, \dots, A_n)}{T_i \mid \dots \mid T_k}$$

gilt:

Falls

$$S \circ (A_1, \dots, A_n) \in H$$

dann gibt es ein  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) und einen Pfad  $P_i$  in  $T_i$ , so daß für alle Formeln  $B \in P_i$  gilt

$$B \in H$$

# Eigenschaften von $H$ (konkret)

Für  $\wedge$ :

Falls  $\{T\}(A \wedge B) \in H$ , dann  $\{T\}A \in H$  und  $\{T\}B \in H$ .

Falls  $\{F\}(A \wedge B) \in H$ , dann  $\{F\}A \in H$  oder  $\{F\}B \in H$ .

Falls  $\{U\}(A \wedge B) \in H$ , dann

$(\{U\}A \in H \text{ und } \{T\}B \in H)$  oder  
 $(\{U\}B \in H \text{ und } \{T\}A \in H)$  oder  
 $(\{U\}A \in H \text{ und } \{U\}B \in H)$ .

Falls  $\{U, F\}(A \wedge B) \in H$ , dann

$\{U, F\}A \in H$  oder  
 $\{U, F\}B \in H$

# Eigenschaften von $H$ (konkret)

Für  $\forall$ :

Falls  $\{U, F\} \forall x A(x) \in H$ , dann  $\{U, F\} A(t) \in H$   
für einen Grundterm  $t$

Falls  $\{T\} \forall x A(x) \in H$ , dann  $\{T\} A(t) \in H$   
für jeden Grundterm  $t$

Falls  $\{F\} \forall x A(x) \in H$ , dann  $\{F\} A(t) \in H$  für ein  $t$ .

Falls  $\{U\} \forall x A(x) \in H$ , dann  $\{U\} A(t) \in H$  für ein  $t$   
und für jeden Grundterm  $s$   
 $\{T\} A(s) \in H$  oder  
 $\{U\} A(s) \in H$

# Modellkonstruktion

Aus dem offenen Pfad  $P$  des erschöpften, systematisch konstruieren Tableau  $T$  gewinnen wir nun eine  $\mathcal{L}_3$ -Struktur  $(\mathcal{M}, v)$ :

Das Universum von  $\mathcal{M}$  bestehe aus allen Grundtermen, die Interpretation der Funktions- und Konstantenzeichen sei wie in Herbrand-Strukturen.

Für jede variablenfreie, atomare Formel  $p$  wird  $v(p)$  definiert durch:

|                     |                    |      |            |
|---------------------|--------------------|------|------------|
| falls               | $\{T\}p \in H,$    | dann | $v(p) = 1$ |
| falls               | $\{F\}p \in H,$    | dann | $v(p) = 0$ |
| falls               | $\{U\}p \in H,$    | dann | $v(p) = u$ |
| falls               | $\{F, U\}p \in H,$ | dann | $v(p) = 0$ |
| sonst (willkürlich) |                    |      | $v(p) = 0$ |

# Schluß des Beweises

Durch Induktion über den Formelaufbau zeigt man für jede signierte Formel  $B \in H$ , daß

$$(\mathcal{M}, v) \models H$$

Insbesondere gilt dann

$$(\mathcal{M}, v) \models \{U, F\}A$$

Damit ist gezeigt: Falls es kein geschlossenes Tableau für  $\{U, F\}A$  gibt, dann ist  $\{U, F\}A$  erfüllbar.

Und also: Ist  $A$  eine  $\mathcal{L}_3$ -Tautologie (und also  $\{U, F\}A$  unerfüllbar), dann gibt es ein geschlossenes Tableau für  $\{U, F\}A$ .

# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$

(Start)

# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$
- 2  $\{T\}\forall x Q(x)$

(Start)  
(aus 1)

# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$  (Start)
- 2  $\{T\}\forall x Q(x)$  (aus 1)
- 3  $\{U, F\}\forall y Q(t(y))$  (aus 1)



# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$  (Start)
- 2  $\{T\}\forall x Q(x)$  (aus 1)
- 3  $\{U, F\}\forall y Q(t(y))$  (aus 1)
- 4  $\{T\}Q(z_1)$  (aus 2)

# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$  (Start)
- 2  $\{T\}\forall x Q(x)$  (aus 1)
- 3  $\{U, F\}\forall y Q(t(y))$  (aus 1)
- 4  $\{T\}Q(z_1)$  (aus 2)
- 5  $\{U, F\}Q(t(c))$  (aus 3)

# Ein Beispieltabelleau

Sei  $t$  ein Term, dessen einzige Variable  $y$  ist. Dann ist

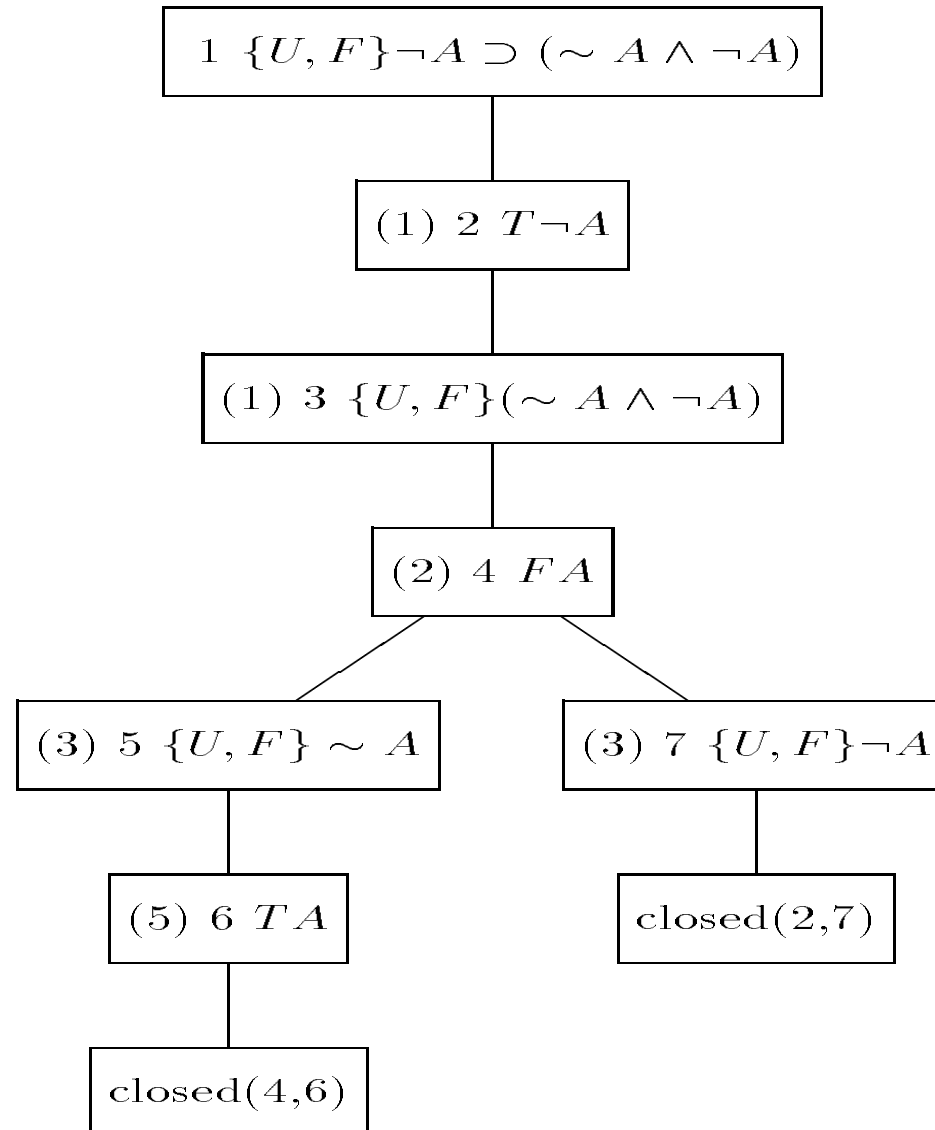
$$C = (\forall x Q(x)) \supset \forall y Q(t(y))$$

eine Tautologie.

- 1  $\{U, F\}C$  (Start)
- 2  $\{T\}\forall x Q(x)$  (aus 1)
- 3  $\{U, F\}\forall y Q(t(y))$  (aus 1)
- 4  $\{T\}Q(z_1)$  (aus 2)
- 5  $\{U, F\}Q(t(c))$  (aus 3)

Der einzige Zweig dieses Tableaus kann mit der Substitution  $\{z_1 \rightarrow t(c)\}$  geschlossen werden (mit 4 und 5)

# Ein verzweigendes Tableau



# Die Junktoren *cand* und *cor*

| $A \text{ cand } B$          |     |     |   |
|------------------------------|-----|-----|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | 1   | $u$ | 0 |
| 1                            | 1   | $u$ | 0 |
| $u$                          | $u$ | $u$ | 0 |
| 0                            | 0   | $u$ | 0 |

| $A \text{ cor } B$           |   |     |     |
|------------------------------|---|-----|-----|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | 1 | $u$ | 0   |
| 1                            | 1 | $u$ | 1   |
| $u$                          | 1 | $u$ | $u$ |
| 0                            | 1 | $u$ | 0   |

Diese Junktoren werden in dem Buch von D. Gries *The Science of Programming* (S. 69) definiert und sind dort Bestandteil einer dreiwertigen Logik zur Programmverifikation.

Bewerkenswert ist die Asymmetrie der beiden Konnektoren, die eine dreiwertige Version der Konjunktion bzw. Disjunktion sein sollen.

# Übungsaufgabe

Welche Tableauregeln müßte man für *cand*, *cor* hinzunehmen, um einen korrekten und vollständigen Tableaunkalkül zu erhalten?

# Lösung: Regeln für *cand*

$$\frac{\{T\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c} \{T\}A \\ \{T\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cand*

$$\frac{\{T\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c} \{T\}A \\ \{T\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{F\}A & \{F\}B \\ & \{T\}A \end{array}}$$



# Lösung: Regeln für *cand*

$$\frac{\{T\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c} \{T\}A \\ \{T\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{F\}A & \{F\}B \\ & \{T\}A \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{U\}A & \{T\}A \\ & \{U\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cand*

$$\frac{\{T\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c} \{T\}A \\ \{T\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{F\}A & \{F\}B \\ & \{T\}A \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{U\}A & \{T\}A \\ & \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F, U\}A \text{ cand } B}{\begin{array}{c|c} \{F, U\}A & \{F, U\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cor*

$$\frac{\{T\}A \text{ cor } B}{\{T\}A \mid \begin{array}{l} \{T\}B \\ \{F\}A \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cor*

$$\frac{\{T\}A \text{ cor } B}{\{T\}A \mid \begin{array}{l} \{T\}B \\ \{F\}A \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cor } B}{\begin{array}{l} \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cor*

$$\frac{\{T\}A \text{ cor } B}{\{T\}A \mid \begin{array}{l} \{T\}B \\ \{F\}A \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cor } B}{\begin{array}{l} \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \text{ cor } B}{\{U\}A \mid \begin{array}{l} \{F\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für *cor*

$$\frac{\{T\}A \text{ cor } B}{\{T\}A \mid \begin{array}{l} \{T\}B \\ \{F\}A \end{array}}$$

$$\frac{\{F\}A \text{ cor } B}{\begin{array}{l} \{F\}A \\ \{F\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U\}A \text{ cor } B}{\{U\}A \mid \begin{array}{l} \{F\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{F, U\}A \text{ cor } B}{\{U\}A \mid \begin{array}{l} \{F\}A \\ \{U, F\}B \end{array}}$$

# Übungsaufgabe

Die  $\circ$  sei definiert durch:

| $A \circ B$                  |   |     |   |
|------------------------------|---|-----|---|
| $B \downarrow A \rightarrow$ | 1 | $u$ | 0 |
| 1                            | 1 | 1   | 1 |
| $u$                          | 1 | 1   | 0 |
| 0                            | 1 | 1   | 1 |

Diese Wahrheitstafel ist interessant, da die Tautologien, die ausschließlich mit  $\circ$  aufgebaut sind, nicht durch ein endliches Hilbertsystem axiomatisiert werden können.

*[A. Urquhart 1986, Seite 85]*

Geben Sie die Tableauregeln für  $\circ$  und die Vorzeichen  $\{T\}, \{F\}, \{U\}, \{U, F\}$  an.

# Lösung: Regeln für $\circ$

$$\frac{\{T\}A \circ B}{\begin{array}{c|c|c|c} \{T\}A & \{U\}A & \{F\}A & \{F\}A \\ \hline & & \{T\}B & \{F\}B \end{array}}$$



# Lösung: Regeln für $\circ$

|                  |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|
| $\{T\}A \circ B$ |          |          |          |
| $\{T\}A$         | $\{U\}A$ | $\{F\}A$ | $\{F\}A$ |
|                  |          | $\{T\}B$ | $\{F\}B$ |

Für  $\{U\}A \circ B$  gibt es keine Regel

# Lösung: Regeln für $\circ$

$$\frac{\{T\}A \circ B}{\begin{array}{c|c|c|c} \{T\}A & \{U\}A & \{F\}A & \{F\}A \\ \hline & & \{T\}B & \{F\}B \end{array}}$$

Für  $\{U\}A \circ B$  gibt es keine Regel

$$\frac{\{F\}A \circ B}{\begin{array}{c} \{F\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

# Lösung: Regeln für $\circ$

$$\frac{\{T\}A \circ B}{\begin{array}{c|c|c|c} \{T\}A & \{U\}A & \{F\}A & \{F\}A \\ \hline & & \{T\}B & \{F\}B \end{array}}$$

Für  $\{U\}A \circ B$  gibt es keine Regel

$$\frac{\{F\}A \circ B}{\begin{array}{c} \{F\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$

$$\frac{\{U, F\}A \circ B}{\begin{array}{c} \{F\}A \\ \{U\}B \end{array}}$$