Anwendungsgebiete mehrwertiger Logik

Anwendungsgebiete

- Unabhängigkeitbeweise,
- Modellierung undefinierter Funktions- und Prädikatswerte in der Spezifikation und Verifikation von Programmen,
- Semantik natürlicher Sprache, z.B. zur Modellierung von Präsuppositionen,
- in der Theorie der logischen Programmierung zur deklarativen Beschreibung der operationalen Semantik der Negation,
- Modellierung elektronischer Schaltkreise,
- zur Modellierung von Vagheit und Unbestimmtheit, z.B. in der Theorie der Intervallarithmetik.

Logik mit partiellen Funktionen

Hat umgekehrt eine Implikation

$$\forall \vec{n}(f_1(\vec{n}) = f_2(\vec{n}) \Rightarrow g_1(\vec{n}) = g_2(\vec{n}))$$

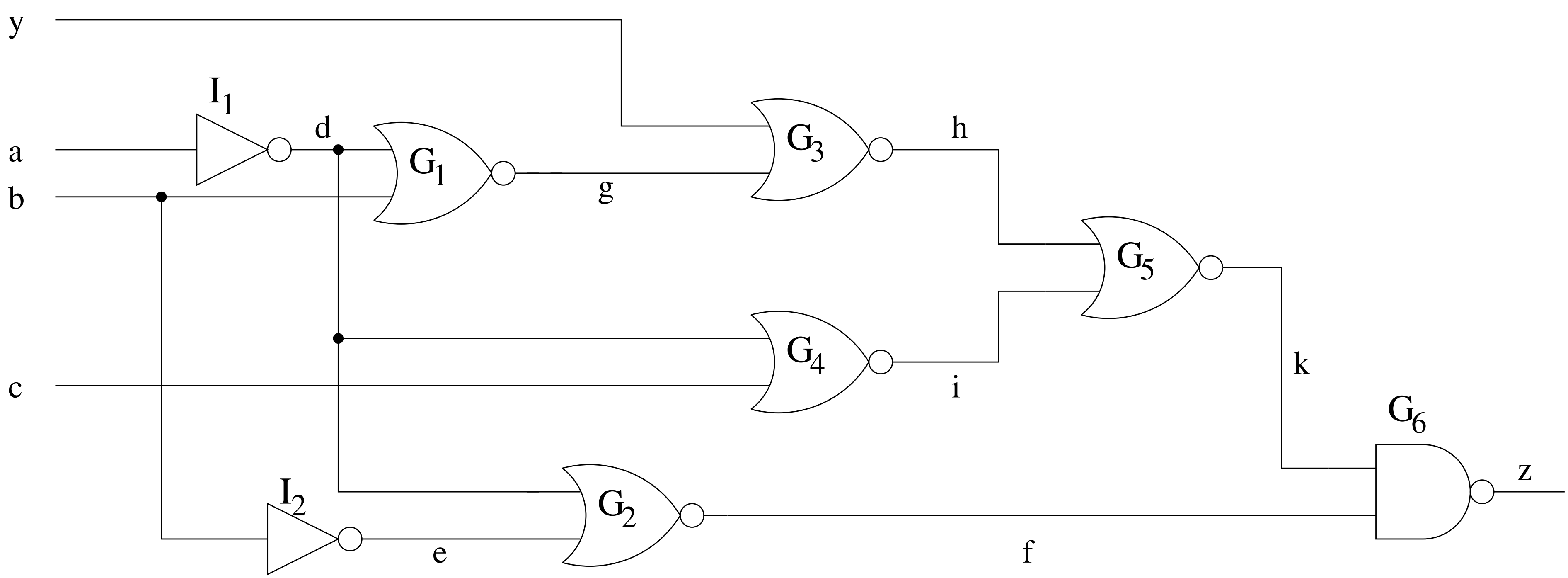
den Wahrheitswert u, so gilt immer noch für alle $\vec{n}$, für die alle $f_i(\vec{n})$ und $g_i(\vec{n})$ definiert sind

$$f_1(\vec{n}) = f_2(\vec{n}) \rightarrow g_1(\vec{n}) = g_2(\vec{n})$$

im 2-wertigen Sinn.

Kombinatorischer Schaltkreis

Beispiel



Die Logik $\mathcal{L}_D^4$

Die vierwertige Logik $\mathcal{L}_D^4$ besitzt die Wahrheitswerte

$$\{1, 0, D, \overline{D}\}$$

Semantik:

Sei C ein Schaltkreis und FM ein Fehlermodell. Leitungen a der Schaltung C werden als logische Variable aufgefasst.
$a_C \in \{0, 1\}$ sei der Wert von a bei korrekter Schaltung C,
$a_F \in \{0, 1\}$ sei der Wert von a in C mit Fehler FM.
Der Wahrheitswert in $\mathcal{L}_D^4$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_4 &= 1 \text{ falls } a_C = 1 \text{ und } a_F = 1 \\
a_4 &= 0 \text{ falls } a_C = 0 \text{ und } a_F = 0 \\
a_4 &= D \text{ falls } a_C = 1 \text{ und } a_F = 0 \\
a_4 &= \overline{D} \text{ falls } a_C = 0 \text{ und } a_F = 1
\end{aligned}$$

Wahrheitstabellen für $\mathcal{L}_D^4$

$NAND$	0	1	D	$\overline{D}$
0	1	1	1	1
1	1	0	$\overline{D}$	D
D	1	$\overline{D}$	$\overline{D}$	1
$\overline{D}$	1	D	1	D

NOR	0	1	D	$\overline{D}$
0	1	0	$\overline{D}$	D
1	0	0	0	0
D	$\overline{D}$	0	$\overline{D}$	0
$\overline{D}$	D	0	0	D

X	0	1	D	$\overline{D}$
$NOTX$	1	0	$\overline{D}$	D

Beschreibung des Schaltkreises

durch Boolesche Gleichungen

$$
\begin{aligned}
d &= \neg a & \qquad h &= \neg(y \vee g) \\
e &= \neg b & \qquad i &= \neg(d \vee c) \\
f &= \neg(d \vee e) & \qquad k &= \neg(h \vee i) \\
g &= \neg(d \vee b) & \qquad z &= \neg(f \wedge k)
\end{aligned}
$$

Testgenerierung

$\mathcal{L}_D^4$-Gleichungen zur Testgenerierung

$$
\begin{array}{lcll}
\{1,0,D,\overline{D}\} & e & = & \neg b \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & f & = & \neg(d \vee e) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & g & = & \neg(d \vee b) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & h & = & \neg(y \vee g) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & i & = & \neg(d \vee c) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & k & = & \neg(h \vee i) \\
\{1,0,D,\overline{D}\} & z & = & \neg(f \wedge k)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\{1\}a \\
\{1,0\}b \\
\{1,0\}c \\
\{1,0\}y \\
\{D,\overline{D}\}z \\
\{\overline{D}\}d
\end{array}
$$

Beobachtung

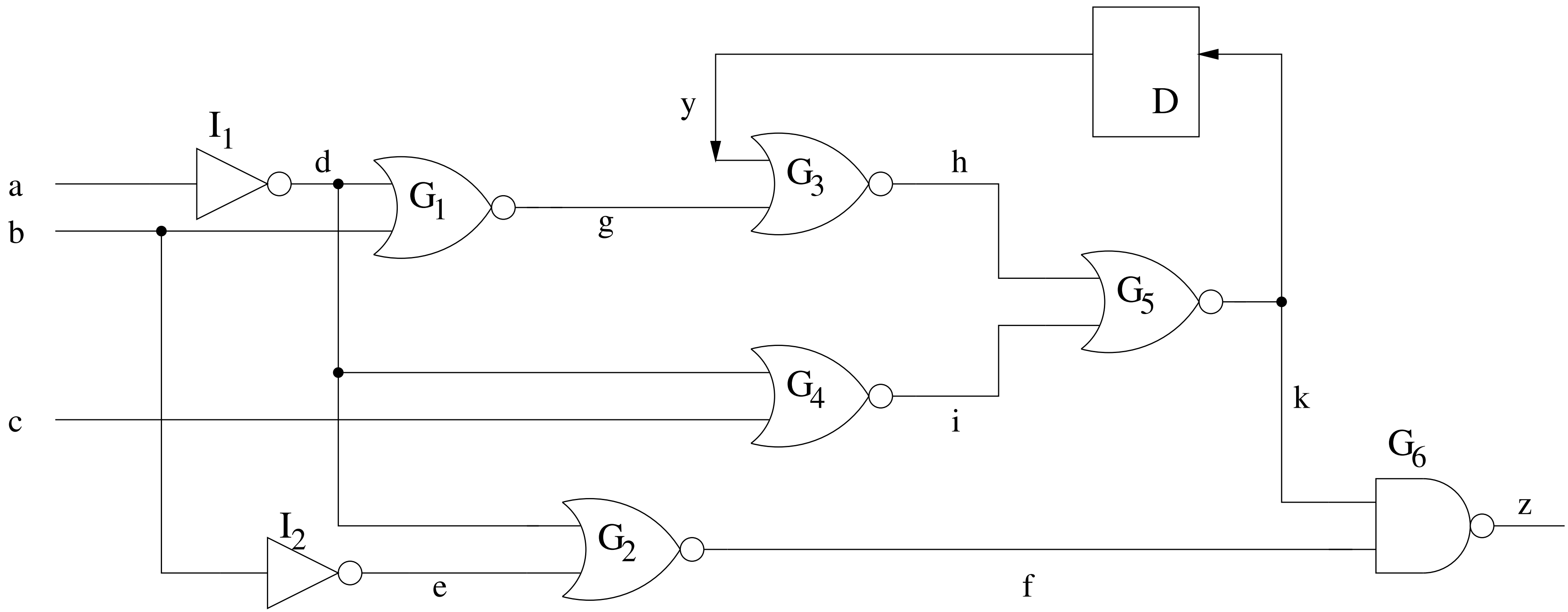
Die Testmuster für einen kombinatorischen Schaltkreis

mit einem Fehler

sind genau

die erfüllenden Belegungen des zugehörigen $\mathcal{L}_D^4$-Gleichungssystems.

Beispiel: sequentieller Schaltkreis



Konjunktion in der Logik von Muth

und	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0/x$	0	$0/x$	$0/x$	0	$0/x$	$0/x$	0	$0/x$	$0/x$
$\bar{D}$	0	$0/x$	$\bar{D}$	0	$0/x$	$\bar{D}$	0	$0/x$	$\bar{D}$
$x/0$	0	0	0	$x/0$	$x/0$	$x/0$	$x/0$	$x/0$	$x/0$
x	0	$0/x$	0	$x/0$	x	x	$x/0$	x	x
$x/1$	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	$x/0$	x	$x/1$
D	0	0	0	$x/0$	$x/0$	$x/0$	D	D	D
$1/x$	0	$0/x$	$0/x$	$x/0$	x	x	D	$1/x$	$1/x$
1	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1

Disjunktion in der Logik von Muth

oder	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1
0	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1
$0/x$	$0/x$	$0/x$	$\bar{D}$	x	x	$0/x$	$1/x$	$1/x$	1
$\bar{D}$	$\bar{D}$	$\bar{D}$	$\bar{D}$	$x/1$	$x/1$	$x/1$	1	1	1
$x/0$	$x/0$	x	$x/1$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1
x	x	x	$x/1$	x	x	$x/1$	$1/x$	$1/x$	1
$x/1$	$x/1$	$x/1$	$x/1$	$x/1$	$x/1$	$x/1$	1	1	1
D	D	$1/x$	1	D	$1/x$	1	D	$1/x$	1
$1/x$	$1/x$	$1/x$	1	$1/x$	$1/x$	1	$1/x$	$1/x$	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Negation in der Logik von Muth

W	0	$0/x$	$\bar{D}$	$x/0$	x	$x/1$	D	$1/x$	1
not W	1	$1/x$	D	$x/1$	x	$x/0$	$\bar{D}$	$0/x$	0