Modale Logiken: Einführung

Modal Logic

In classical logic, it is only important whether a formula is true

In modal logic, it is also important in which

- way
- mode
- state

a formula is true

Modal Logic

In classical logic, it is only important whether a formula is true

In modal logic, it is also important in which

- way
- mode
- state

a formula is true

A formula (a proposition) is

- necessarily / possibly true
- true today / tomorrow
- believed / known
- true before / after an action / the execution of a program

Propositional Modal Logic: Formulas

- The propositional variables are modal formulas
- If A, B are modal formulas, then

$$\neg A \qquad (A \wedge B) \qquad (A \vee B) \qquad (A \rightarrow B) \qquad (A \leftrightarrow B)$$

$\Box A$ (read “box A”, “necessarily A”)

$\Diamond A$ (read “diamond A”, “possibly A”)

are modal formulas

Informal Interpretations of $\Box$

$\Box F$ means

- F is necessarily true
- F is always true (in future states/words)
- an agent a believes F
- an agent a knows F
- F is true after all possible executions of a program p

Informal Interpretations of $\Box$

$\Box F$ means

- F is necessarily true
- F is always true (in future states/words)
- an agent a believes F
- an agent a knows F
- F is true after all possible executions of a program p

Notation

If necessary write

$$\Box_a F \qquad \Box_p F \qquad [a]F \qquad [p]F$$

instead of $\Box F$

Informal Interpretations of $\Diamond$

$\Box F$	$\Diamond F$ (the same as $\neg\Box\neg F$)
F is necessarily true	F is possibly true
F is always true	F at least once true
agent a believes F	F is consistent with a's beliefs
agent a knows F	a does not know $\neg F$
F is true after all possible executions of program p	F is true after at least one possible execution of program p

Ein Puzzle

Drei Weisen werden Hüte aufgesetzt, jedem genau einer. Die Hüte sind entweder weiß oder schwarz, und jedem ist bekannt, daß mindestens ein schwarzer Hut mit dabei ist.
Jeder der Weisen sieht, welche Hüte die anderen beiden aufsitzen haben und soll erschließen, welchen Hut er aufsitzen hat, natürlich ohne in einen Spiegel zu schauen, den Hut abzunehmen oder ähnliches.
Nach einer Weile sagt einer der Weisen: "Ich weiß nicht, welchen Hut ich aufhabe.Nach einer weiteren Pause des Nachdenkens sagt ein zweiter: "Ich weiß auch nicht, welchen Hut ich aufhabe."
"Dann", sagt der Dritte, "weiß ich, daß ich einen schwarzen Hut aufhabe."

Formalisierung des Puzzles

Notation

S_i	der i-te Weise hat einen schwarzen Hut auf
W_i	der i-te Weise hat einen weißen Hut auf
$\Box_i A$	der i-te Weise weiß, daß A wahr ist

jeweils für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\qquad (B_1)$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg\Box_2 S_2$ (B_2)

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\quad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\quad (B_2)$
- $W_i \wedge W_j \rightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\qquad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\qquad (B_2)$
- $W_i \wedge W_j \rightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \rightarrow \Box_j W_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\qquad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\qquad (B_2)$
- $W_i \wedge W_j \rightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \rightarrow \Box_j W_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \rightarrow \Box_j \neg W_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\qquad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\qquad (B_2)$
- $W_i \land W_j \rightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \rightarrow \Box_j W_i$ für $i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j$
- $\neg W_i \rightarrow \Box_j \neg W_i$ für $i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j$
- $\neg W_i \rightarrow S_i$ für $i \in \{1,2,3\}$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ (B_1)
- $\neg\Box_2 S_2$ (B_2)
- $W_i \wedge W_j \rightarrow S_k$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \rightarrow \Box_j W_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \rightarrow \Box_j \neg W_i$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \rightarrow S_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$
- $\neg S_i \rightarrow W_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$

Formalisierung des Puzzles

Fakten

- $\neg\Box_1 S_1$ $\quad (B_1)$
- $\neg\Box_2 S_2$ $\quad (B_2)$
- $W_i \wedge W_j \longrightarrow S_k$ für $i,j,k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden
- $W_i \longrightarrow \Box_j W_i$ für $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \longrightarrow \Box_j \neg W_i$ für $i,j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$
- $\neg W_i \longrightarrow S_i$ für $i \in \{1,2,3\}$
- $\neg S_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1,2,3\}$
- $S_i \vee W_i$ für $i \in \{1,2,3\}$

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \lor \neg\Box_1 A$

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg \Box_1 A$
- $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ (K)

Akzeptable Axiome

- alle AL-Axiome z.B. $\Box_1 A \vee \neg\Box_1 A$
- $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ (K)
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A) \rightarrow \Box B$ (K)

Akzeptable Schlußregeln

- $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$ (Modus ponens)

- $$\frac{A}{\Box A}$$ (G)

Man beachte:

Die Regel (G) is nicht das gleiche, wie $A \rightarrow \Box A$ als Axiom zu verwenden.