Modale Quantorenlogik

Syntax

Die Menge aller Formeln der modalen Prädikatenlogik, Fml_{Qmod}, ist die kleinste Menge von Formeln mit:

1. jede atomare Formel ist in Fml_{Qmod}.
2. für $F_1, F_2 \in Fml_{Qmod}$ liegen auch $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \rightarrow F_2$ und $\neg F_1$ in Fml_{Qmod}.
3. Ist $F \in Fml_{Qmod}$ und x eine Individuenvariable, dann sind auch $\forall x F$ und $\exists x F$ Formeln in Fml_{Qmod}.
4. für $F \in Fml_{Qmod}$ gilt auch $\Box F \in Fml_{Qmod}$ und $\Diamond F \in Fml_{Qmod}$.

Kripke Strukturen für Fml_{Qmod}

$\mathcal{K} = (G, R, M)$ besteht aus einem Kripke Rahmen (G, R) und einer Abbildung M, die jedem $g \in G$ eine prädikatenlogische Struktur $M(g)$ zuordnet, so daß für alle g_1, g_2 in G mit $R(g_1, g_2)$ gilt:

- das Universum U_1 von $M(g_1)$ ist eine Teilmenge des Universums U_2 von $M(g_2)$ und
- auf der kleineren Menge U_1 stimmen die Interpretationen der Funktions- und Konstantenzeichen in $M(g_1)$ und $M(g_2)$ überein.

$\mathcal{K} = (G, R, M)$ heißt eine Kripke Struktur mit konstantem Universum, wenn für alle $g \in G$

$$M(g) = \mathcal{M}$$

gilt für eine konstante Struktur $\mathcal{M}$.

Modellrelation

1	$g \models r(t_1, \ldots t_k)$	gdw	$M(g) \models r(t_1, \ldots t_k)$ für atomare Formeln $r(t_1, \ldots t_k)$
2	$g \models F \wedge H$	gdw	$g \models F$ und $g \models H$
3	$g \models F \vee H$	gdw	$g \models F$ oder $g \models H$
4	$g \models F \rightarrow H$	gdw	(nicht $g \models F$) oder $g \models H$
5	$g \models \neg F$	gdw	nicht $g \models F$
6	$g \models \Box F$	gdw	für alle h mit $R(g,h)$gilt $h \models F$
7	$g \models \Diamond F$	gdw	es gibt ein h mit $R(g,h)$ und $h \models F$
8	$g \models \forall x F(x)$	gdw	für alle $d \in U_g$ gilt $g \models F(d)$
9	$g \models \exists x F(x)$	gdw	es gibt ein $d \in U_g$ mit $g \models F(d)$

Tableaukalkül

Präfixformeln

In den Tableaus werden Gebilde der Form

$$\sigma\, Z\, A$$

auftreten, wobei σ ein Präfix, $Z \in \{F, T\}$ und $A \in Fml_{Qmod}$.

Präfixformeln

In den Tableaus werden Gebilde der Form

$$\sigma\, Z\, A$$

auftreten, wobei σ ein Präfix, $Z \in \{F, T\}$ und $A \in Fml_{Qmod}$.

Ein Präfix σ ist dabei eine endliche Folge natürlicher Zahlen.

Präfixformeln

In den Tableaus werden Gebilde der Form

$$\sigma\, Z\, A$$

auftreten, wobei σ ein Präfix, $Z \in \{F, T\}$ und $A \in Fml_{Qmod}$.

Ein Präfix σ ist dabei eine endliche Folge natürlicher Zahlen.

Wir nennen für die Modallogik K

σ_1 zugänglich von σ,

wenn

$$\sigma_1 = \sigma n$$

für ein geeignetes n ist.

Formelklassen

α-Formeln sind: $T\ A \wedge B,\quad F\ A \vee B,\quad F\ A \rightarrow B,\quad F\ \neg A$

β-Formeln sind: $T\ A \vee B,\quad F\ A \wedge B,\quad T\ A \rightarrow B,\quad T\ \neg A$

γ-Formeln: $T\ \forall x A(x),\quad F\ \exists x A(x)$

δ-Formeln: $T\ \exists x A(x),\quad F\ \forall x A(x)$

ν-Formeln: $T\ \Box A,\quad F\ \Diamond A$

π-Formeln: $T\ \Diamond A,\quad F\ \Box A$

Nachfolgerformeln

Jeder α- und β-Formel ordnen wir zwei Nachfolgerformeln α_1, α_2 bzw. β_1, β_2 zu:

α	α_1	α_2
$T\ A \wedge B$	$T\ A$	$T\ B$
$F\ A \vee B$	$F\ A$	$F\ B$
$F\ A \rightarrow B$	$T\ A$	$F\ B$
$F\ \neg A$	$T\ A$	$T\ A$

β	β_1	β_2
$T\ A \vee B$	$T\ A$	$T\ B$
$F\ A \wedge B$	$F\ A$	$F\ B$
$T\ A \rightarrow B$	$T\ B$	$F\ A$
$T\ \neg A$	$F\ A$	$F\ A$

Nachfolgerformeln (Forts.)

Den γ-, δ-, ν-, π-Formeln wird jeweils eine Nachfolgerformel $\gamma_0, \ldots, \pi_0$ zugeordnet.

γ	$\gamma_0(x)$
$T\ \forall x A(x)$	$T\ A(x)$
$F\ \exists x A(x)$	$F\ A(x)$

δ	$\delta_0(x)$
$T\ \exists x A(x)$	$T\ A(x)$
$F\ \forall x A(x)$	$F\ A(x)$

ν	ν_0
$T\ \Box A$	$T\ A$
$F\ \Diamond A$	$F\ A$

π	π_0
$T\ \Diamond A$	$T\ A$
$F\ \Box A$	$F\ A$

Aussagenlogische Tableauregeln

Für jede α-Formel α, jede β-Formel β und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1\\ \sigma\alpha_2\end{array}} \qquad\qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \text{ oder } \sigma\beta_2}$$

Tableauregeln für Quantoren

Für jede γ-Formel γ und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\gamma}{\sigma\gamma_0(x)}$$

wobei x eine neue freie Variable ist.

Tableauregeln für Quantoren

Für jede γ-Formel γ und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\gamma}{\sigma\gamma_0(x)}$$

wobei x eine neue freie Variable ist.

Für jede δ-Formel δ und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\delta}{\sigma\delta_0(f(y_1,\ldots,y_n))}$$

wobei f ein neues Skolemfunktionszeichen ist
und $y_1,\ldots,y_n$ die freien Variablen in δ.

Modale Tableauregeln

Für jede ν-Formel ν und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\nu}{\sigma'\nu_0}$$

wobei σ' von σ aus zugänglich sein und auf dem Pfad, der durch diese Regel verlängert wird, schon vorkommen muß.

Modale Tableauregeln

Für jede ν-Formel ν und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\nu}{\sigma'\nu_0}$$

wobei σ' von σ aus zugänglich sein und auf dem Pfad, der durch diese Regel verlängert wird, schon vorkommen muß.

Für jede π-Formel π und jedes Präfix σ:

$$\frac{\sigma\pi}{\sigma'\pi_0}$$

wobei σ' eine unbeschränkte Erweiterung von σ ist, d.h., σ' ist von σ aus erreichbar und σ' ist kein Anfangsstück eines anderen Präfixes auf dem Pfad.

Varianten

Die angegebenen ν- und π-Regeln sind korrekt und vollständig für die modale Logik K.

Varianten

Die angegebenen ν- und π-Regeln sind korrekt und vollständig für die modale Logik K.

Für andere Logiken müssen neben einer möglichen Änderung der Zugänglichkeitsrelation für Präfixe auch die beiden modalen Regeln eventuell modifiziert werden.

Varianten

Die angegebenen ν- und π-Regeln sind korrekt und vollständig für die modale Logik K.

Für andere Logiken müssen neben einer möglichen Änderung der Zugänglichkeitsrelation für Präfixe auch die beiden modalen Regeln eventuell modifiziert werden.

Ein Tableau, das mit Hilfe der obigen Regeln aufgebaut ist, nennen wir ein K-Tableau.

Varianten

Die angegebenen ν- und π-Regeln sind korrekt und vollständig für die modale Logik K.

Für andere Logiken müssen neben einer möglichen Änderung der Zugänglichkeitsrelation für Präfixe auch die beiden modalen Regeln eventuell modifiziert werden.

Ein Tableau, das mit Hilfe der obigen Regeln aufgebaut ist, nennen wir ein K-Tableau.

In der Logik $S4$ ist ein Präfix σ' von σ aus zugänglich genau dann, wenn σ ein Anfangsstück von σ' ist. Insbesondere kann auch $\sigma' = \sigma$ sein.

Beispiel eines S4-Tableaus

$$1 \quad F\ \Box A \longrightarrow \Box(\Box A \vee B) \quad (1)$$

Beispiel eines S4-Tableaus

$$1 \quad F\ \Box A \longrightarrow \Box(\Box A \vee B) \qquad (1)$$

$$1 \quad T\ \Box A \qquad (2) \text{ aus } 1$$

Beispiel eines S4-Tableaus

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B) & (1) \\
1 & T\ \Box A & (2) \text{ aus } 1 \\
1 & F\ \Box(\Box A \vee B) & (3) \text{ aus } 1
\end{array}
$$

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)
1	$T\ \Box A$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3) aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4) aus 3

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)
1	$T\ \Box A$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3) aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4) aus 3
11	$F\ \Box A$	(5) aus 4

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)
1	$T\ \Box A$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3) aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4) aus 3
11	$F\ \Box A$	(5) aus 4
11	$F\ B$	(6) aus 4

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)	
1	$T\ \Box A$	(2)	aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3)	aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4)	aus 3
11	$F\ \Box A$	(5)	aus 4
11	$F\ B$	(6)	aus 4
111	$F\ A$	(7)	aus 5

Beispiel eines S4-Tableaus

1	$F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B)$	(1)
1	$T\ \Box A$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(\Box A \vee B)$	(3) aus 1
11	$F\ \Box A \vee B$	(4) aus 3
11	$F\ \Box A$	(5) aus 4
11	$F\ B$	(6) aus 4
111	$F\ A$	(7) aus 5
111	$T\ A$	(8) aus 2

Beispiel eines S4-Tableaus

$$
\begin{array}{rll}
1 & F\ \Box A \rightarrow \Box(\Box A \vee B) & (1) \\
1 & T\ \Box A & (2)\ \text{aus } 1 \\
1 & F\ \Box(\Box A \vee B) & (3)\ \text{aus } 1 \\
11 & F\ \Box A \vee B & (4)\ \text{aus } 3 \\
11 & F\ \Box A & (5)\ \text{aus } 4 \\
11 & F\ B & (6)\ \text{aus } 4 \\
111 & F\ A & (7)\ \text{aus } 5 \\
111 & T\ A & (8)\ \text{aus } 2
\end{array}
$$

Im $\mathbf{K}$-Kalkül dagegen kann in Zeile 8 nur $11\ \ T\ A$ stehen, was nicht reicht, um das Tableau zu schließen.

Einschränkung der ν-Regel

$$1 \quad F\, \Box A \rightarrow \Diamond A \quad (1)$$

Einschränkung der ν-Regel

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\
1 & T\;\Box A & (2) \text{ aus } 1
\end{array}
$$

Einschränkung der ν-Regel

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\
1 & T\;\Box A & (2) \text{ aus } 1 \\
1 & F\;\Diamond A & (3) \text{ aus } 1
\end{array}
$$

Einschränkung der ν-Regel

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\
1 & T\ \Box A & (2) \text{ aus } 1 \\
1 & F\ \Diamond A & (3) \text{ aus } 1
\end{array}
$$

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Einschränkung der ν-Regel

$$\begin{array}{lll} 1 & F\,\Box A \to \Diamond A & (1) \\ 1 & T\,\Box A & (2)\text{ aus }1 \\ 1 & F\,\Diamond A & (3)\text{ aus }1 \end{array}$$

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Einschränkung der ν-Regel

1	$F\,\Box A \rightarrow \Diamond A$	(1)	
1	$T\,\Box A$	(2)	aus 1
1	$F\,\Diamond A$	(3)	aus 1
11	$T\,A$	(4)	aus 2

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Einschränkung der ν-Regel

1	$F\,\Box A \rightarrow \Diamond A$	(1)	
1	$T\,\Box A$	(2)	aus 1
1	$F\,\Diamond A$	(3)	aus 1
11	$T\,A$	(4)	aus 2
11	$F\,A$	(5)	aus 3

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Einschränkung der ν-Regel

$$\begin{array}{rll} 1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\ 1 & T\ \Box A & (2) \text{ aus } 1 \\ 1 & F\ \Diamond A & (3) \text{ aus } 1 \\ 11 & T\ A & (4) \text{ aus } 2 \\ 11 & F\ A & (5) \text{ aus } 3 \end{array}$$

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Die Formel $\Box A \rightarrow \Diamond A$ ist aber keine K-Tautologie.

Einschränkung der ν-Regel

$$\begin{array}{rll} 1 & F\,\Box A \rightarrow \Diamond A & (1) \\ 1 & T\;\Box A & (2)\ \text{aus } 1 \\ 1 & F\;\Diamond A & (3)\ \text{aus } 1 \\ 11 & T\;A & (4)\ \text{aus } 2 \\ 11 & F\;A & (5)\ \text{aus } 3 \end{array}$$

Es ist keine Regel mehr anwendbar.

Ohne die Einschränkung, daß das Präfix schon auf dem Pfad vorkommen muß, könnten wir das Tableau schließen.

Die Formel $\Box A \rightarrow \Diamond A$ ist aber keine K-Tautologie.

Fazit: Die Einschränkung an die ν-Regel ist notwendig für die Korrektheit des Kalküls.

Einschränkung der π-Regel

$$1 \quad F\ \Box p \vee \neg \Diamond \Box p \quad (1)$$

Einschränkung der π-Regel

$$
\begin{array}{lll}
1 \quad F\ \Box p \vee \neg \Diamond \Box p & (1) & \\
1 \quad F\ \Box p & (2) & \text{aus } 1
\end{array}
$$

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2
1	$T\ \Diamond\Box p$	(5)	aus 3

Einschränkung der π-Regel

$$
\begin{array}{rll}
1 & F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p & (1) \\
1 & F\ \Box p & (2)\ \text{aus } 1 \\
1 & F\ \neg\Diamond\Box p & (3)\ \text{aus } 1 \\
123 & F\ p & (4)\ \text{aus } 2 \\
1 & T\ \Diamond\Box p & (5)\ \text{aus } 3
\end{array}
$$

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2
1	$T\ \Diamond\Box p$	(5)	aus 3
12	$T\ \Box p$	(6)	aus 5

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg \Diamond \Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg \Diamond \Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2
1	$T\ \Diamond \Box p$	(5)	aus 3
12	$T\ \Box p$	(6)	aus 5
123	$T\ p$	(7)	aus 6

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2
1	$T\ \Diamond\Box p$	(5)	aus 3
12	$T\ \Box p$	(6)	aus 5
123	$T\ p$	(7)	aus 6

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Die Formel $\Box p \vee \neg\Diamond\Box p$ ist aber keine S4-Tautologie.

Einschränkung der π-Regel

1	$F\ \Box p \vee \neg\Diamond\Box p$	(1)	
1	$F\ \Box p$	(2)	aus 1
1	$F\ \neg\Diamond\Box p$	(3)	aus 1
123	$F\ p$	(4)	aus 2
1	$T\ \Diamond\Box p$	(5)	aus 3
12	$T\ \Box p$	(6)	aus 5
123	$T\ p$	(7)	aus 6

Fortsetzung unter Mißachtung der Einschränkung an die π-Regel

Die Formel $\Box p \vee \neg\Diamond\Box p$ ist aber keine S4-Tautologie.

Fazit: Die Einschränkung an die π-Regel ist notwendig für die Korrektheit des Kalküls.

Geschlossenes Tableau im K-Kalkül

1	$F\ (\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$	(1)
1	$T\ \Box A \wedge \Box B$	(2) aus 1
1	$F\ \Box(A \wedge B)$	(3) aus 1
1	$T\ \Box A$	(4) aus 2
1	$T\ \Box B$	(5) aus 2
11	$F\ A \wedge B$	(6) aus 3
11	$T\ A$	(7) aus 4
11	$T\ B$	(8) aus 5

11 $F\ A$ (9) aus (6)	11 $F\ B$ (10) aus (6)
abgeschl. $(9,7)$	abgeschl. $(10,8)$

Noch ein Beispiel im K-Kalkül

$$\begin{array}{lll} 1 & F\ \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B) & (1) \\ 1 & T\ \Box(A \wedge B) & (2)[1] \\ 1 & F\ \Box A \wedge \Box B & (3)[1] \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} 1 & F\ \Box A & (4)[3] \\ 11 & F\ A & (6)[4] \\ 11 & T\ A \wedge B & (7)[2] \\ 11 & T\ A & (8)[7] \\ 11 & T\ B & (9)[7] \\ & \text{abgeschl.} & (8,6) \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 1 & F\ \Box B & (5)[3] \\ 11 & F\ B & (10)[5] \\ 11 & T\ A \wedge B & (11)[2] \\ 11 & T\ A & (12)[11] \\ 11 & T\ B & (13)[11] \\ & \text{abgeschl.} & (13,10) \end{array}$$

Man beachte: Formel (2) wird zweimal benutzt.

Ein $S4$-Tableau

$$1 \quad F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p \qquad (1)$$

Ein $S4$-Tableau

$$1 \quad F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p \qquad (1)$$

$$1 \quad T\ \Box\Diamond p \qquad (2)[1]$$

Ein $S4$-Tableau

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p & (1) \\
1 & T\ \Box\Diamond p & (2)[1] \\
1 & F\ \Diamond\Box p & (3)[1]
\end{array}
$$

Ein $S4$-Tableau

$$\begin{array}{lll}
1 & F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p & (1) \\
1 & T\ \Box\Diamond p & (2)[1] \\
1 & F\ \Diamond\Box p & (3)[1] \\
1 & T\ \Diamond p & (4)[2]
\end{array}$$

Ein $S4$-Tableau

$$
\begin{array}{lll}
1 & F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p & (1) \\
1 & T\ \Box\Diamond p & (2)[1] \\
1 & F\ \Diamond\Box p & (3)[1] \\
1 & T\ \Diamond p & (4)[2] \\
1 & F\ \Box p & (5)[3]
\end{array}
$$

Ein $S4$-Tableau

$$
\begin{array}{rlr}
1 & F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p & (1) \\
1 & T\ \Box\Diamond p & (2)[1] \\
1 & F\ \Diamond\Box p & (3)[1] \\
1 & T\ \Diamond p & (4)[2] \\
1 & F\ \Box p & (5)[3] \\
11 & T\ p & (6)[4]
\end{array}
$$

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)		11	$F\ \Box p$	(9)[3]
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]				
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]				
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]				
1	$F\ \Box p$	(5)[3]				
11	$T\ p$	(6)[4]				
12	$F\ p$	(7)[5]				
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]				

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	$(2)[1]$
1	$F\ \Diamond\Box p$	$(3)[1]$
1	$T\ \Diamond p$	$(4)[2]$
1	$F\ \Box p$	$(5)[3]$
11	$T\ p$	$(6)[4]$
12	$F\ p$	$(7)[5]$
11	$T\ \Diamond p$	$(8)[2]$
11	$F\ \Box p$	$(9)[3]$
12	$T\ \Diamond p$	$(10)[2]$

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	$(2)[1]$
1	$F\ \Diamond\Box p$	$(3)[1]$
1	$T\ \Diamond p$	$(4)[2]$
1	$F\ \Box p$	$(5)[3]$
11	$T\ p$	$(6)[4]$
12	$F\ p$	$(7)[5]$
11	$T\ \Diamond p$	$(8)[2]$
11	$F\ \Box p$	$(9)[3]$
12	$T\ \Diamond p$	$(10)[2]$
12	$F\ \Box p$	$(11)[3]$

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]
11	$F\ \Box p$	(9)[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)[2]
12	$F\ \Box p$	(11)[3]
111	$T\ p$	(12)[8]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \longrightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]

11	$F\ \Box p$	(9)[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)[2]
12	$F\ \Box p$	(11)[3]
111	$T\ p$	(12)[8]
112	$F\ p$	(13)[9]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]
11	$F\ \Box p$	(9)[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)[2]
12	$F\ \Box p$	(11)[3]
111	$T\ p$	(12)[8]
112	$F\ p$	(13)[9]
121	$T\ p$	(14)[10]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)	
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)	[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)	[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)	[2]
1	$F\ \Box p$	(5)	[3]
11	$T\ p$	(6)	[4]
12	$F\ p$	(7)	[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)	[2]
11	$F\ \Box p$	(9)	[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)	[2]
12	$F\ \Box p$	(11)	[3]
111	$T\ p$	(12)	[8]
112	$F\ p$	(13)	[9]
121	$T\ p$	(14)	[10]
122	$F\ p$	(15)	[11]

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)
1	$T\ \Box\Diamond p$	(2)[1]
1	$F\ \Diamond\Box p$	(3)[1]
1	$T\ \Diamond p$	(4)[2]
1	$F\ \Box p$	(5)[3]
11	$T\ p$	(6)[4]
12	$F\ p$	(7)[5]
11	$T\ \Diamond p$	(8)[2]
11	$F\ \Box p$	(9)[3]
12	$T\ \Diamond p$	(10)[2]
12	$F\ \Box p$	(11)[3]
111	$T\ p$	(12)[8]
112	$F\ p$	(13)[9]
121	$T\ p$	(14)[10]
122	$F\ p$	(15)[11]

Tableau terminiert nicht.

Ein $S4$-Tableau

1	$F\ \Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$	(1)		11	$F\ \Box p$	$(9)[3]$
1	$T\ \Box\Diamond p$	$(2)[1]$		12	$T\ \Diamond p$	$(10)[2]$
1	$F\ \Diamond\Box p$	$(3)[1]$		12	$F\ \Box p$	$(11)[3]$
1	$T\ \Diamond p$	$(4)[2]$		111	$T\ p$	$(12)[8]$
1	$F\ \Box p$	$(5)[3]$		112	$F\ p$	$(13)[9]$
11	$T\ p$	$(6)[4]$		121	$T\ p$	$(14)[10]$
12	$F\ p$	$(7)[5]$		122	$F\ p$	$(15)[11]$
11	$T\ \Diamond p$	$(8)[2]$				

Tableau terminiert nicht.

$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ ist keine S4-Tautologie.