Vorlesung

# Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

**Bernhard Beckert**

**Institut für Informatik**

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

**Sommersemester 2007**

# Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

**Katrin Erk** (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

**Jürgen Dix** (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

*– Bernhard Beckert, April 2007*

## Inhalt von Teil III

- Vereinfachtes Modell eines Computers: **endlicher Automat**
- Die von endlichen Automaten erkannten **„rationalen“** Sprachen sind genau die Typ-3-Sprachen (**rechtslinear**, **regulär**)
- **Determinierte** und **indeterminierte** endliche Automaten sind äquivalent
- **Pumping Lemma** erlaubt, eine Sprache als nicht rational nachzuweisen.
- Es gibt Algorithmen, die **Probleme über endlichen Automaten** bzw. Typ-3-Sprachen lösen.
- Typ-3-Sprachen sind genau die, die durch **reguläre Ausdrücke** beschrieben werden können.

# Teil III

# Endliche Automaten

# Beispiel

## Beispiel 11.1

Die Sprache

$$L = \{aa\}\{ab\}^*\{c\}$$

ist regulär.

Denn sie wird (z. B.) erzeugt von der rechtslinearen Grammatik

$$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, R, S),$$

mit Regelmenge $R$:

$$S \to aaA$$
$$A \to abA \mid c$$

# Beispiel

## Beispiel 11.2

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen ist regulär.

Eine erzeugende Grammatik ist

$$G = (\{S, S_0, S_1, S_2\}, \{0, \ldots, 9\}, R, S)$$

mit der Regelmenge $R$:

$$\begin{aligned}
S &\to 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid 0 \\
S_0 &\to 0S_0 \mid 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid \varepsilon \\
S_1 &\to 0S_1 \mid 3S_1 \mid 6S_1 \mid 9S_1 \mid 1S_2 \mid 4S_2 \mid 7S_2 \mid 2S_0 \mid 5S_0 \mid 8S_0 \\
S_2 &\to 0S_2 \mid 3S_2 \mid 6S_2 \mid 9S_2 \mid 1S_0 \mid 4S_0 \mid 7S_0 \mid 2S_1 \mid 5S_1 \mid 8S_1
\end{aligned}$$

Ohne das $\varepsilon$ in der zweiten Regel wäre nur die “0” als Terminalwort herleitbar.

## Grammatik vs. Automat

**Grammatik:** erzeugt Wörter

**Automat:** analysiert / erkennt Wörter

**beide:** beschreiben / definieren eine Sprachen

# Endlicher Automat: Informell

## Endlicher Automat

- Ein endlicher Automat testet, ob ein gegebenes $w \in \Sigma^*$ in einer Sprache $L$ liegt.
- **Lesekopf** erlaubt $w$ zu lesen.
  Bewegt sich nur von links nach rechts.
- Endlich viele mögliche **interne Zustände**,
  immer einer davon ist der aktuelle Zustand
- Automat beginnt in einem **initialen Zustand**.
- Bei jedem gelesenen Buchstaben Übergang zu neuem aktuellen Zustand, in Abhängigkeit vom Buchstaben und dem alten Zustand
- Wenn am Ende von $w$ ein **finaler Zustand** erreicht ist,
  ist $w$ **akzeptiert** als Element von $L$,
  sonst nicht.
- Automat **stoppt** (auf jeden Fall) nach $|w|$ Schritten

# Endlicher Automat: Modell eines einfachen Computers

## Endlicher Automat: Computer mit begrenztem Speicher

- Kann vom Band nur lesen
  $\Rightarrow$ kein externer Speicher
- Speichert nur den aktuellen Zustand ($\approx$ Programmzähler)
  $\Rightarrow$ stark begrenzter interner Speicher

# Endlicher Automat: Darstellung als Graph

## Darstellung als Graph

- ein **Knoten** für jeden **Zustand**
- **Kanten** beschreiben **Zustandsänderungen**,
  sind mit Buchstaben beschriftet
- **initiale** Zustände sind mit einem **Pfeil** gekennzeichnet
- **finale Zustände** mit einem **doppelten Kreis**

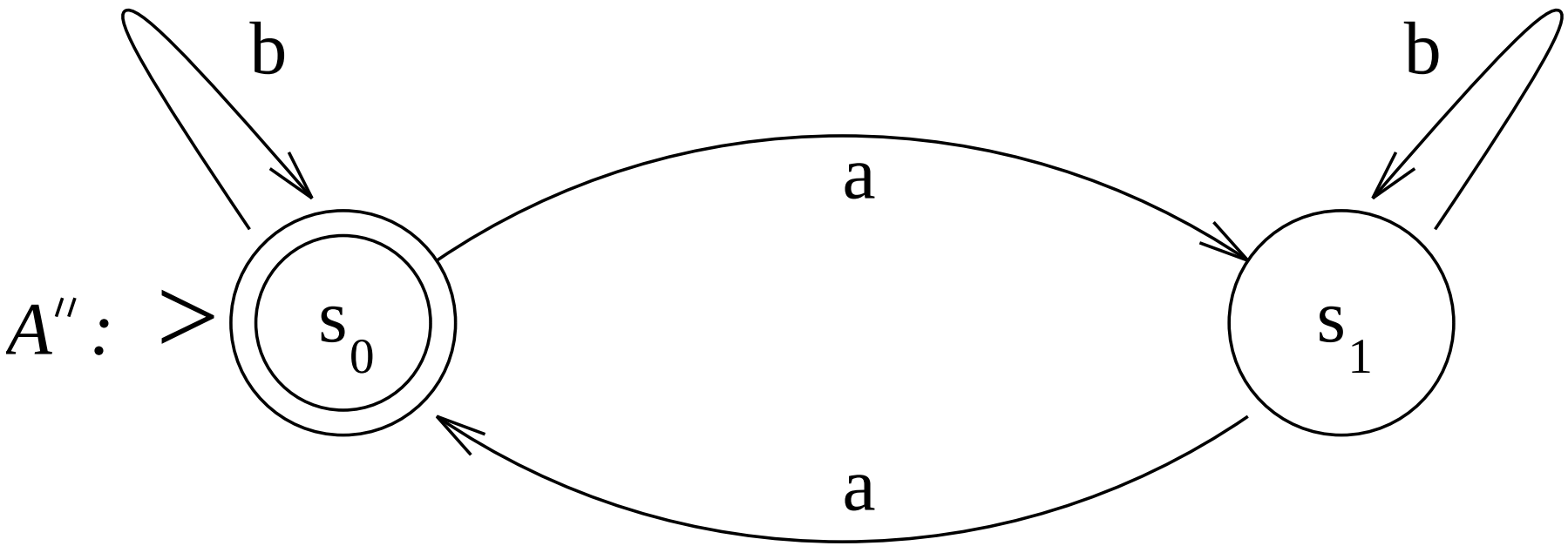
# Endlicher Automat: Darstellung als Graph

**Beispiel 11.3 (Sprache $\{w \mid \#_a(w)$ *gerade*$\} \subset \{a,b\}^*$)**

Der folgende endliche Automat erkennt die Sprache

$$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \qquad \text{über} \qquad \Sigma = \{a,b\}$$

der Wörter mit gerader Anzahl von „a“s



# Endlicher Automat: Definition

## Definition 11.4 (Endlicher Automat)

Ein **endlicher Automat (e.a., finite automaton** ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

Dabei ist

- $K$ eine endliche Menge von **Zuständen**
- $\Sigma$ ein **endliches Alphabet**
  (aus dessen Buchstaben die Eingabewörter bestehen können)
- $\delta : K \times \Sigma \to K$ die totale(!) **Übergangsfunktion**
- $s_0 \in K$ der **Startzustand**
- $F \subseteq K$ die Menge der **finalen Zustände**

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

## Bedeutung der Übergangsfunktion

$$\delta(q, a) = q'$$

bedeutet:

- Wenn der Automat im Zustand $q$ ist
- und ein $a$ liest,
- dann geht in den Zustand $q'$ über.

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

**Definition 11.5 (Erweiterung von $\delta$ zu $\delta^*$)**

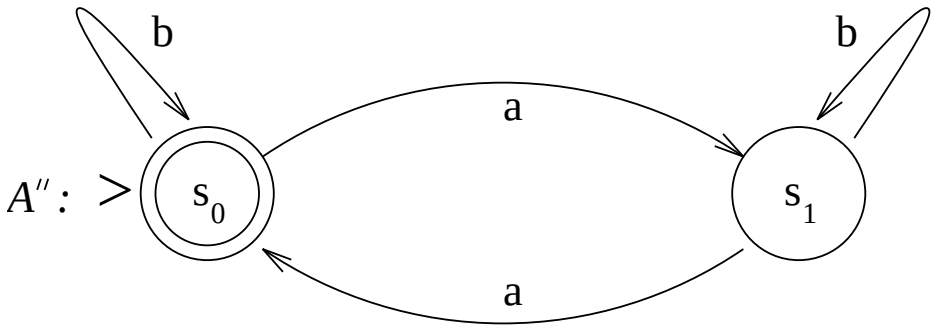
$$\delta^* : K \times \Sigma^* \to K$$

ist strukturell rekursiv über $\Sigma^*$ definiert durch:

$$\delta^*(q, \varepsilon) := q$$
$$\delta^*(q, wa) := \delta(\delta^*(q, w), a)$$

# Endlicher Automat: Beispiel

## Beispiel 11.6




Dieser Automat azeptiert die Sprache

$$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a,b\}^*$$

(s. Bsp. 11.3).

Formal hat er die Form:

$$\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{a,b\}, \delta, s_0, \{s_0\})$$

mit

$$\delta(s_0, a) = s_1 \qquad \delta(s_1, a) = s_0$$
$$\delta(s_0, b) = s_0 \qquad \delta(s_1, b) = s_1$$

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

**Beispiel 11.7 (Beispiel für $\delta^*$)**

$$
\begin{aligned}
\delta^*(s_0, aab) &= \delta\big(\delta^*(s_0, aa), b\big) \\
&= \delta\big(\delta\big(\delta^*(s_0, a), a\big), b\big) \\
&= \delta\big(\delta\big(\delta(\delta^*(s_0, \varepsilon), a\big), a\big), b\big) \\
&= \delta\big(\delta\big(\delta(s_0, a), a\big), b\big) \\
&= \delta\big(\delta(s_1, a), b\big) \\
&= \delta(s_0, b) \\
&= s_0
\end{aligned}
$$

# Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

## Definition 11.8 (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

## Definition 11.9 (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)

Die Menge

$$\textbf{RAT} := \{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen
heißt Menge der **rationalen** Sprachen

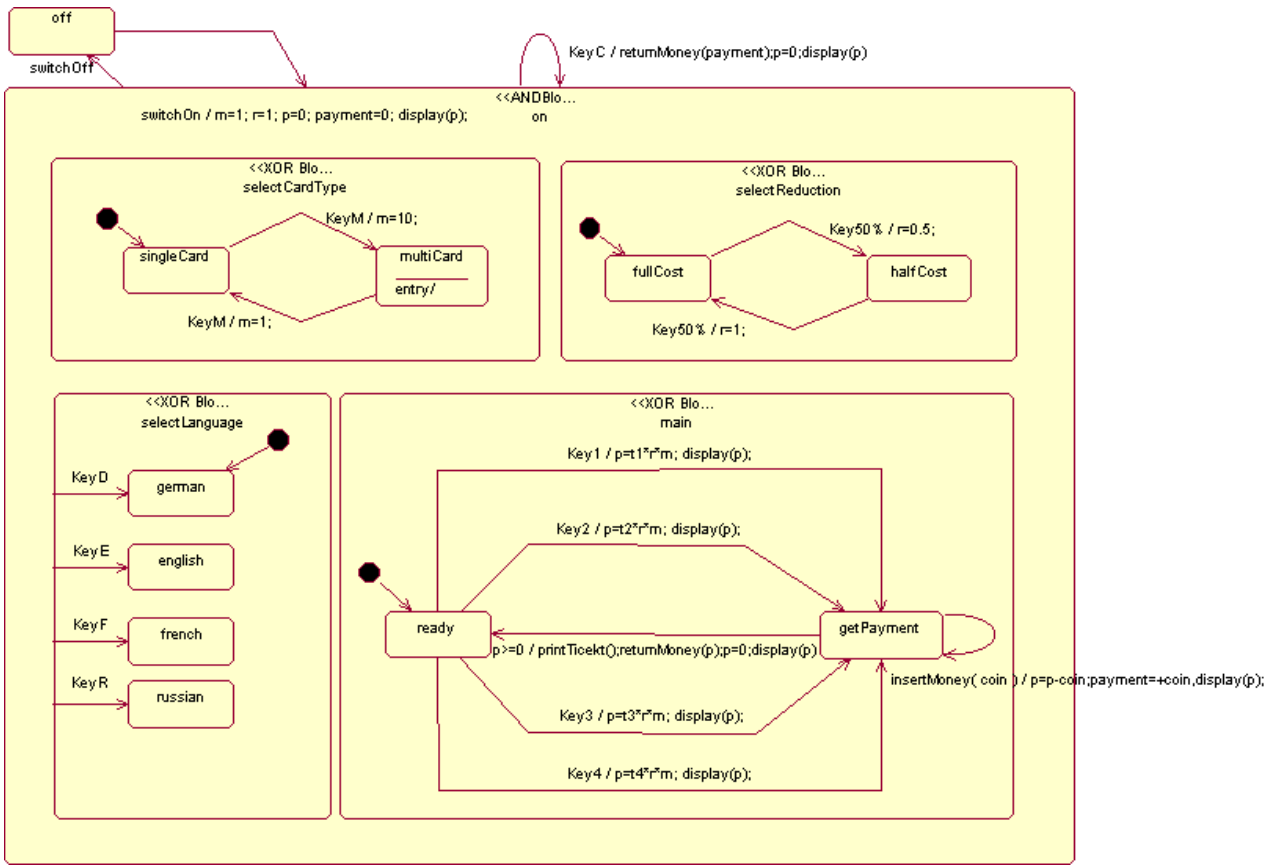
Wir zeigen demnächst:
**RAT** = Menge der regulären Sprachen

# Endliche Automaten: UML State Charts

## UML State Charts

UML State Charts sind eine (erweiterte) Form endlicher Automaten

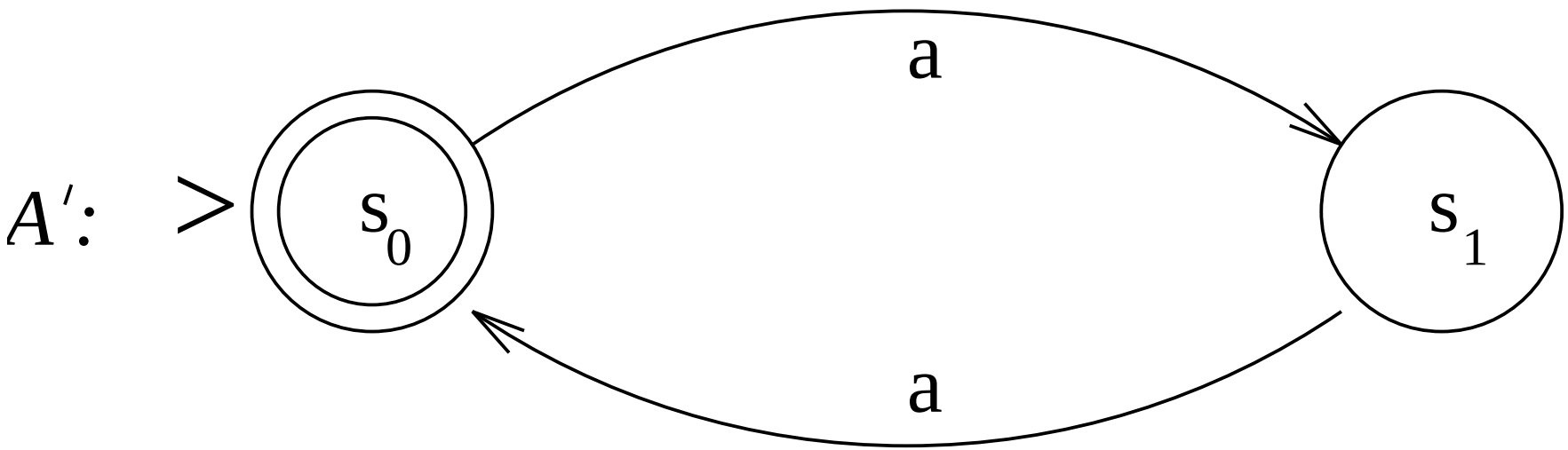
## Beispiel 11.10



# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

## Beispiel 11.11

Die Sprache aller Wörter mit gerader Anzahl von a
über dem (kleineren) Alphabet $\Sigma = \{a\}$
wird akzeptiert von:



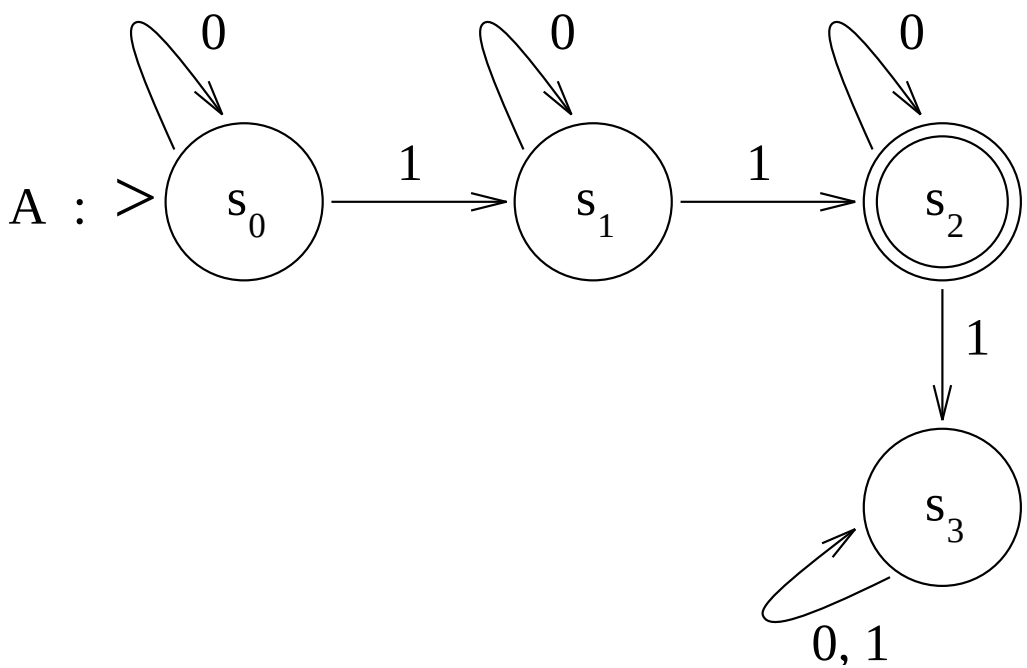
# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

## Beispiel 11.12

Die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält genau zwei Einsen}\}$$

wird akzeptiert von dem folgendenendlichen Automaten:



# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

## Beispiel 11.13

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen wird akzeptiert durch: