Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Definition 9.8 (Eingabe)

w heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

startet.

$(w_1, \ldots, w_n)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\# \ldots \#w_n\underline{\#}$$

startet.

Definition 9.8 (Eingabe)

w heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

startet.

$(w_1, \ldots, w_n)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\#\ldots\#w_n\underline{\#}$$

startet.

Turing-Maschine

Definition 9.8 (Eingabe)

w heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

startet.

$(w_1, \ldots, w_n)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\#\ldots\#w_n\underline{\#}$$

startet.

Definition 9.9 (Halten, Hängen)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** $q = h$.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** es keine Nachfolgekonfiguration gibt
  Insbesondere: wenn $w = \varepsilon \wedge \exists q' \ \delta(q, a) = (q', L)$.

Turing-Maschine

Definition 9.9 (Halten, Hängen)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** $q = h$.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** es keine Nachfolgekonfiguration gibt
  Insbesondere: wenn $w = \varepsilon \wedge \exists q' \; \delta(q, a) = (q', L)$.

Definition 9.10 (Rechnung)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine. Man schreibt

$$C \vdash_{\mathcal{M}}^{*} C'$$

gdw.:
es gibt eine Reihe von Konfigurationen

$$C_0, C_1, \ldots, C_n \qquad (n \geq 0)$$

so daß

- $C = C_0$ und $C' = C_n$
- für alle $i < n$ gilt: $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Dann heißt $C_0, C_1, \ldots, C_n$ eine **Rechnung** der Länge n von C_0 nach C_n.

Turing-Maschine

Definition 9.10 (Rechnung)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine. Man schreibt

$$C \vdash^*_{\mathcal{M}} C'$$

gdw.:
es gibt eine Reihe von Konfigurationen

$$C_0, C_1, \dots, C_n \qquad (n \geq 0)$$

so daß

- $C = C_0$ und $C' = C_n$
- für alle $i < n$ gilt: $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Dann heißt $C_0, C_1, \dots, C_n$ eine **Rechnung** der Länge n von C_0 nach C_n.

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ gdw.
    $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert gdw.
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ gdw
    $s, \#w_1\#\ldots\#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\#\ldots\#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert gdw
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\#\ldots\#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \rightarrow ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ gdw
    $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert gdw
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \rightarrow ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m, \ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ gdw
    $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert gdw
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ <u>gdw</u>
    $s, \#w_1\#\ldots\#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\#\ldots\#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert <u>gdw</u>
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\#\ldots\#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - welche Funktionen sie berechnen.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen.**

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen.**

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen**.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen.**

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen**.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen**.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine: Akzeptierte Sprache

Definition 9.12 (Von einer DTM akzeptierte Sprache)

Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von w steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten

Sie darf es sogar nicht!

Turing-Maschine: Akzeptierte Sprache

Definition 9.12 (Von einer DTM akzeptierte Sprache)

Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von w steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten
Sie darf es sogar nicht!

Turing-Maschine: Akzeptierte Sprache

Definition 9.12 (Von einer DTM akzeptierte Sprache)

Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von w steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten
Sie darf es sogar nicht!

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**
  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.
- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

$$f: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:
  - Wenn $f(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

$$s, \#|^{i_1}\#\ldots\#|^{i_k}\underline{\#} \quad \vdash^*_{\mathcal{M}} \quad h, \#|^{j_1}\#\ldots\#|^{j_n}\underline{\#}$$

  - Ist $f(i_1, \ldots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\#\ldots\#|^{i_k}\#$ nicht.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**
  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.
- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

$$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:
  - Wenn $f(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

$$s, \#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\underline{\#} \ \vdash^*_{\mathcal{M}} \ h, \#|^{j_1}\# \ldots \#|^{j_n}\underline{\#}$$

  - Ist $f(i_1, \ldots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\#$ nicht.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**
  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.
- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

$$f:\ \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:
  - Wenn $f(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

$$s, \#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\underline{\#}\ \vdash^*_{\mathcal{M}}\ h, \#|^{j_1}\# \ldots \#|^{j_n}\underline{\#}$$

  - Ist $f(i_1, \ldots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\#$ nicht.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**
  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.
- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

$$f: \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:
  - Wenn $f(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

$$s, \#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\underline{\#} \ \vdash^*_{\mathcal{M}} \ h, \#|^{j_1}\# \ldots \#|^{j_n}\underline{\#}$$

  - Ist $f(i_1, \ldots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\#$ nicht.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Definition 9.13

- $\mathbf{TM}^{part}$ ist die Menge der partiellen TM-berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$
- **TM** ist die Menge der totalen TM-berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Teil V

Teil V

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:
Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:

Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:

Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, …

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:
Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:

Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:
Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, . . .

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:
Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Turing-Maschinen, die nie hängen

Gegeben:

Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, mit Eingabge $\#w\underline{\#}$

Daraus konstruieren wir eine DTM $\mathcal{M}'$, die

- dasselbe berechnet wie $\mathcal{M}$
- **nie hängt**.

Variationen von Turing-Maschinen

Turing-Maschinen, die nie hängen

Gegeben:

Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, mit Eingabge $\#w\underline{\#}$

Daraus konstruieren wir eine DTM $\mathcal{M}'$, die

- dasselbe berechnet wie $\mathcal{M}$
- **nie hängt**.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α, das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α, das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α,
  das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α,
  das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α,
  das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Eigenschaften der nicht-hängenden DTM

- $\mathcal{M}'$ hält für Eingabe w <u>gdw</u> $\mathcal{M}$ hält für Eingabe w.
- $\mathcal{M}'$ hängt nie.
  Wenn $\mathcal{M}$ hängt, rechnet $\mathcal{M}'$ unendlich lang.

O.B.d.A. sollen alle Turing-Maschinen, die wir von jetzt an betrachten, nie hängen.

Variationen von Turing-Maschinen

Eigenschaften der nicht-hängenden DTM

- $\mathcal{M}'$ hält für Eingabe w gdw $\mathcal{M}$ hält für Eingabe w.
- $\mathcal{M}'$ hängt nie.
  Wenn $\mathcal{M}$ hängt, rechnet $\mathcal{M}'$ unendlich lang.

O.B.d.A. sollen alle Turing-Maschinen, die wir von jetzt an betrachten, nie hängen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2 \underline{a_2} u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1 \underline{a_1} u_1$,
in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$,
falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$. Für u_2: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$, sonst $u_2 = a_1 u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; sonst $w_1 = w_2 a_2$.

Fall 3: $b = R$. Für w_2: Wenn $a_1 = \#$ und $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$, sonst $w_2 = w_1 a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; ansonsten $u_1 = a_2 u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2 \underline{a_2} u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1 \underline{a_1} u_1$,
in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$,
falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$. Für u_2: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$, sonst $u_2 = a_1 u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; sonst $w_1 = w_2 a_2$.

Fall 3: $b = R$. Für w_2: Wenn $a_1 = \#$ und $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$, sonst $w_2 = w_1 a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; ansonsten $u_1 = a_2 u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2\underline{a_2}u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1\underline{a_1}u_1$,
in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$,
falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$. Für u_2: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$, sonst $u_2 = a_1 u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; sonst $w_1 = w_2 a_2$.

Fall 3: $b = R$. Für w_2: Wenn $a_1 = \#$ und $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$, sonst $w_2 = w_1 a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; ansonsten $u_1 = a_2 u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2\underline{a_2}u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1\underline{a_1}u_1$,
in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$,
falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$. Für u_2: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$, sonst $u_2 = a_1 u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; sonst $w_1 = w_2 a_2$.

Fall 3: $b = R$. Für w_2: Wenn $a_1 = \#$ und $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$, sonst $w_2 = w_1 a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; ansonsten $u_1 = a_2 u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Theorem 10.2 (Simulation von zw-DTM durch DTM)

Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet oder eine Sprache L akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet bzw. L akzeptiert.

Beweis

Sei $w = a_1 \dots a_n$ die Eingabe für $M = (K, \Sigma, \delta, s)$.
Dann sieht das beidseitig unendliche Band zu Beginn der Rechnung so aus:

$$\dots \#\#\# a_1 \dots a_n \underline{\#}\# \dots$$

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Theorem 10.2 (Simulation von zw-DTM durch DTM)

Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet oder eine Sprache L akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet bzw. L akzeptiert.

Beweis

Sei $w = a_1 \ldots a_n$ die Eingabe für $M = (K, \Sigma, \delta, s)$.
Dann sieht das beidseitig unendliche Band zu Beginn der Rechnung so aus:

$$\ldots \#\#\# a_1 \ldots a_n \underline{\#}\# \ldots$$

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

$$\begin{array}{ll} \text{Spur 1} & \#\# \quad \ldots \# \;\; \# \\ \text{Spur 2} & \# \, a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \cdots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

  $$\begin{array}{l} \text{Spur 1}\ \#\#\ \ \ldots\#\ \ \# \\ \text{Spur 2}\ \#\,a_1\ldots a_n\underline{\#} \end{array}\cdots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input *w* beginnt, umklappen:

  $$\begin{array}{ll} \text{Spur 1} & \#\# \ \ldots \# \ \ \# \\ \text{Spur 2} & \# a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \cdots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

$$\begin{array}{l} \text{Spur 1}\ \#\#\ \ \ldots\#\ \ \# \\ \text{Spur 2}\ \#\, a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \cdots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

  Spur 1 ## $\ldots$# #

  Spur 2 # $a_1 \ldots a_n \underline{\#}$ $\cdots$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

  Spur 1 ## $\ldots$# #
  Spur 2 # $a_1 \ldots a_n \underline{\#}$ $\cdots$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

  $$\begin{array}{ll} \text{Spur 1} & \#\# \quad \ldots \# \;\; \# \\ \text{Spur 2} & \# \, a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \cdots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Sei $\mathcal{M}' = (K', \Sigma', \delta', s)$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Sei $\mathcal{M}' = (\, K', \Sigma', \delta', s \,)$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Sei $\mathcal{M}' = (K', \Sigma', \delta', s)$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Erste Phase der Rechnung:

$\mathcal{M}'$ rechnet

$$s, \#a_1 \ldots a_n\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q, \$ \begin{array}{l} \#\# \;\; \ldots \# \;\; \# \\ \# a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \# \ldots$$

Die zweite Spur wird nur so weit wie nötig angelegt.

Mit dem Symbol $\$$ markiert $\mathcal{M}'$ das Ende des Halbbands, damit sie nicht hängenbleibt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Erste Phase der Rechnung:

$\mathcal{M}'$ rechnet

$$s, \# a_1 \dots a_n \underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q, \$ \begin{array}{c} \#\# \;\; \dots \# \;\; \# \\ \# a_1 \dots a_n \underline{\#} \end{array} \# \dots$$

Die zweite Spur wird nur so weit wie nötig angelegt.

Mit dem Symbol $\$$ markiert $\mathcal{M}'$ das Ende des Halbbands, damit sie nicht hängenbleibt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Zweite Phase der Rechnung:

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$.

Dabei muß sie sich immer merken, auf welcher der beiden Spuren sie gerade arbeitet.

Deshalb definieren wir $K' \supseteq K \times \{1, 2\}$.

(q, i) bedeutet, daß die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ im Zustand q ist und $\mathcal{M}'$ auf Spur i arbeitet.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Zweite Phase der Rechnung:
$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$.

Dabei muß sie sich immer merken, auf welcher der beiden Spuren sie gerade arbeitet.

Deshalb definieren wir $K' \supseteq K \times \{1, 2\}$.
(q, i) bedeutet, daß die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ im Zustand q ist und $\mathcal{M}'$ auf Spur i arbeitet.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Zweite Phase der Rechnung:
$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$.

Dabei muß sie sich immer merken, auf welcher der beiden Spuren sie gerade arbeitet.

Deshalb definieren wir $K' \supseteq K \times \{1, 2\}$.
(q, i) bedeutet, daß die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ im Zustand q ist und $\mathcal{M}'$ auf Spur i arbeitet.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Für die Simulation von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{M}'$ soll nun gelten:

$\mathcal{M}$ erreicht von $s, \#\vdots\#w\underline{\#}$ aus eine Konfiguration $q, u_1 b \vdots a u_2$

<u>gdw</u>

$\mathcal{M}'$ rechnet $p, \$ \begin{smallmatrix} \# \\ \# \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \dots \\ w \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \# \\ \underline{\#} \end{smallmatrix} \# \vdash^*_{\mathcal{M}'} p', \$ \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} u_1^R \\ u_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \# \\ \# \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} \# \\ \# \end{smallmatrix} \#$

($\vdots$ steht in beiden Konf. zwischen denselben zwei Bandpositionen (an denen das Band “umklappt”))

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Für die Simulation von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{M}'$ soll nun gelten:

$\mathcal{M}$ erreicht von $s, \#\vdots\#w\underline{\#}$ aus eine Konfiguration $q, u_1 b \vdots a u_2$

<u>gdw</u>

$\mathcal{M}'$ rechnet $p, \$ \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \genfrac{}{}{0pt}{}{\ldots}{w} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\underline{\#}} \# \vdash^*_{\mathcal{M}'} p', \$ \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a} \genfrac{}{}{0pt}{}{u_1^R}{u_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \#$

($\vdots$ steht in beiden Konf. zwischen denselben zwei Bandpositionen (an denen das Band “umklappt”))

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\substack{\#\\\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,2), \substack{x\\a}\right) = ((q',2), L)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,1), \substack{a\\x}\right) = ((q',1), R)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 2), \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}\right) = ((q', 2), L)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 1), \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}\right) = ((q', 1), R)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,2), \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}\right) = ((q',2), L)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,1), \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}\right) = ((q',1), R)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,2), \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}\right) = \left((q',2), L\right)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q,1), \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}\right) = \left((q',1), R\right)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des “linken Halbbandes” revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 2), \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}\right) = \left((q', 2), L\right)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 1), \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}\right) = \left((q', 1), R\right)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein # erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 2), \genfrac{}{}{0pt}{}{x}{a}\right) = \left((q', 2), L\right)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\left((q, 1), \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{x}\right) = \left((q', 1), R\right)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}((q,1),\$) = ((q,2),R)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}((q,2),\$) = ((q,1),R)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von \$
- $\delta_{\mathcal{M}'}((q,i),\#) = (q,i),\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#})$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1),\$\big) = \big((q,2),R\big)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2),\$\big) = \big((q,1),R\big)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von $
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,i),\#\big) = \big((q,i),\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}\big)$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1),\$\big) = \big((q,2),R\big)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2),\$\big) = \big((q,1),R\big)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von $\$$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,i),\#\big) = \big(q,i),{\#\atop\#}\big)$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1),\$\big) = \big((q,2),R\big)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2),\$\big) = \big((q,1),R\big)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von $\$$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,i),\#\big) = \big((q,i),\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}\big)$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Wenn dann $\mathcal{M}$ mit $h, u\underline{\#}$ hält, dann erreicht $\mathcal{M}'$ eine Konfiguration, die eine der folgenden Formen hat:

$$(i) \qquad (h,1), \$ {\#\atop\#} \ldots {\overline{\#}\atop\#} {u^R \atop \#\ldots\#} {\#\atop\#} \ldots {\#\atop\#} \text{ oder}$$

$$(ii) \qquad (h,2), \$ {\#\atop\#} \ldots {\#\atop\#} {\#\ldots\#\atop u} {\#\atop\underline{\#}} \ldots {\#\atop\#} \text{ oder}$$

$$(iii) \qquad (h,2), \$ {u_1^R \atop u_2\underline{\#}} {\#\atop\#} \ldots {\#\atop\#} \text{ mit } u_1 u_2 = u.$$

Bei Konfigurations-Form (iii) kann entweder das u_1^R über das u_2 "hinausragen" oder umgekehrt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Dritte Phase der Rechnung:
Die Simulation von $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen.

$\mathcal{M}'$ muß nun den Bandinhalt von zwei Spuren auf nur eine heruntertransformieren, um danach die Konfiguration $h, \#u\underline{\#}$ zu erreichen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Dritte Phase der Rechnung:
Die Simulation von $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen.

$\mathcal{M}'$ muß nun den Bandinhalt von zwei Spuren auf nur eine heruntertransformieren, um danach die Konfiguration $h, \#u\underline{\#}$ zu erreichen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu #. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \genfrac{}{}{0pt}{}{u_1^R}{\#\ldots\#} u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q, \$\genfrac{}{}{0pt}{}{u_1^R}{\#\ldots\#} u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q', \$u_1 u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das \$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\substack{\#\\\#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu #. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\substack{\#\\\#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q, \$ \substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q', \$ u_1 u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das $\$$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\substack{\#\\\#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu #. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\substack{\#\\\#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q, \$\substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q', \$u_1 u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das \$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\substack{\#\\\#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu #. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\substack{\#\\\#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q, \$\substack{u_1^R\\\#\ldots\#} u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q', \$u_1 u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das \$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Damit hat die Standard-DTM $\mathcal{M}'$ die Arbeitsweise der zw-DTM $\mathcal{M}$ vollständig simuliert.

Also kann man mit zw-Turing-Maschinen nicht mehr berechnen als mit Standard DTM'n. □

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Damit hat die Standard-DTM $\mathcal{M}'$ die Arbeitsweise der zw-DTM $\mathcal{M}$ vollständig simuliert.

Also kann man mit zw-Turing-Maschinen nicht mehr berechnen als mit Standard DTM'n. □

DTM mit k Halbbändern

Definition 10.3 (DTM mit k Halbbändern, k-DTM)

Eine **Turing-Maschine** $\mathcal{M} = (K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k, \delta, s)$ **mit k Halbbändern** (mit je einem Kopf) ist eine Turing-Maschine mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : K \times \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma_1 \cup \{L, R\}) \times \ldots \times (\Sigma_k \cup \{L, R\})$$

Eine **Konfiguration** einer k-Turing-Maschine hat die Form

$$C = q, w_1 \underline{a_1} u_1, \ldots, w_k \underline{a_k} u_k .$$

DTM mit k Halbbändern

Definition 10.3 (DTM mit k Halbbändern, k-DTM)

Eine **Turing-Maschine** $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k, \delta, s\ )$ **mit k Halbbändern** (mit je einem Kopf) ist eine Turing-Maschine mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : K \times \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma_1 \cup \{L, R\}) \times \ldots \times (\Sigma_k \cup \{L, R\})$$

Eine **Konfiguration** einer k-Turing-Maschine hat die Form

$$C = q, w_1 \underline{a_1} u_1, \ldots, w_k \underline{a_k} u_k .$$

DTM mit k Halbbändern

Definition 10.3 (DTM mit k Halbbändern, k-DTM)

Eine **Turing-Maschine** $\mathcal{M} = (K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k, \delta, s)$ **mit k Halbbändern** (mit je einem Kopf) ist eine Turing-Maschine mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : K \times \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma_1 \cup \{L, R\}) \times \ldots \times (\Sigma_k \cup \{L, R\})$$

Eine **Konfiguration** einer k-Turing-Maschine hat die Form

$$C = q, w_1 \underline{a_1} u_1, \ldots, w_k \underline{a_k} u_k .$$

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, daß sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, daß sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, daß sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, daß sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

Theorem 10.4 (Simulation von k-DTM durch DTM)

Zu jeder k-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet (resp. eine Sprache L akzeptiert), existiert eine DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet (resp. L akzeptiert).

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine **k-DTM** zu simulieren, verwenden wir **$2k$ Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine **k-DTM** zu simulieren, verwenden wir **$2k$ Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine **k-DTM** zu simulieren, verwenden wir $2k$ **Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine k**-DTM** zu simulieren, verwenden wir $2k$ **Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine ***k*-DTM** zu simulieren, verwenden wir **$2k$ Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine **k-DTM** zu simulieren, verwenden wir **$2k$ Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

Teil V

Teil V

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.1 (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K, Σ, s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangs**relation**:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times \big((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})\big)$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.1 (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K, Σ, s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangs**relation**:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times \big((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})\big)$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.1 (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K, Σ, s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangs**relation**:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times \big((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})\big)$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Mehrere Nachfolgekonfigurationen

Konfigurationen sind definiert wie bei DTMs.

Nun kann eine Konfiguration aber mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen haben.

Indeterminierte Turing-Maschine

Mehrere Nachfolgekonfigurationen

Konfigurationen sind definiert wie bei DTMs.

Nun kann eine Konfiguration aber mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen haben.

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.2 (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren)

Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** bei Input w, falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die $\mathcal{M}$ wählen kann, **eine gibt**, so daß $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort w, falls sie **von $s, \#w\underline{\#}$ aus einen Haltezustand erreichen kann**, und $\mathcal{M}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.2 (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren)

Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** bei Input w, falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die $\mathcal{M}$ wählen kann, **eine gibt**, so daß $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort w, falls sie **von** $s, \#w\underline{\#}$ **aus einen Haltezustand erreichen kann**, und $\mathcal{M}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.2 (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren)

Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** bei Input w, falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die $\mathcal{M}$ wählen kann, **eine gibt**, so daß $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort w, falls sie **von** $s, \#w\underline{\#}$ **aus einen Haltezustand erreichen kann**, und $\mathcal{M}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Bemerkung

Wenn es nicht nur darauf ankommt, ob die Maschine hält, sondern auch mit welchem Bandinhalt:

Welche der vielen Haltekonfigurationen sollte dann gelten?

Um dies Problem zu umgehen, übertragen wir die Begriffe des *Entscheidens* und *Aufzählens* **nicht** auf NTM. Im Allgemeinen verwendet man NTM auch nicht dazu, Funktionen zu berechnen.

Indeterminierte Turing-Maschine

Bemerkung

Wenn es nicht nur darauf ankommt, ob die Maschine hält, sondern auch mit welchem Bandinhalt:

Welche der vielen Haltekonfigurationen sollte dann gelten?

Um dies Problem zu umgehen, übertragen wir die Begriffe des *Entscheidens* und *Aufzählens* **nicht** auf NTM. Im Allgemeinen verwendet man NTM auch nicht dazu, Funktionen zu berechnen.

Indeterminierte Turing-Maschine

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Indeterminierte Turing-Maschine

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Indeterminierte Turing-Maschine

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **"Die NTM rät"**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**

- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!