

Vorlesung
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /
Einführung in die Theoretische Informatik I**

Bernhard Beckert

Institut für Informatik



Sommersemester 2007

Teil III

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)**
- 3 Automaten mit ϵ -Kanten
- 4 Endliche Automaten \equiv Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping Lemma
- 6 Wortprobleme
- 7 Rational = Regulär

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endliche Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangsfunktion δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
evtl. **mehrere Nachfolgezustände** – oder **gar keiner**
- festgelegt durch Übergangsrelation Δ

Indeterminierter endlicher Automat

Definition 12.1 (Indeterminierter endlicher Automat)

Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

Indeterminierter endlicher Automat: Übergangsrelation

Definition 12.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \Delta^*((q, \varepsilon), q') & \quad \text{gdw} \quad q' = q \\ \Delta^*((q, wa), q') & \quad \text{gdw} \quad \exists q'' \in K (\Delta^*((q, w), q'') \wedge \Delta((q'', a), q')) \end{aligned}$$

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A} akzeptiert ein Wort w , wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der **Beschriftung** w durch \mathcal{A} gibt,
- der in einem **finalen** Zustand endet.

Definition 12.3 (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem indeterminierten endlichen Automaten \mathcal{A} **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*((s_0, w), q)\}$$

NDEA: Beispiel

Beispiel 12.4

Der Automat

$$\mathcal{A} = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \Delta, \{S_0\}, \{S_0\})$$

mit

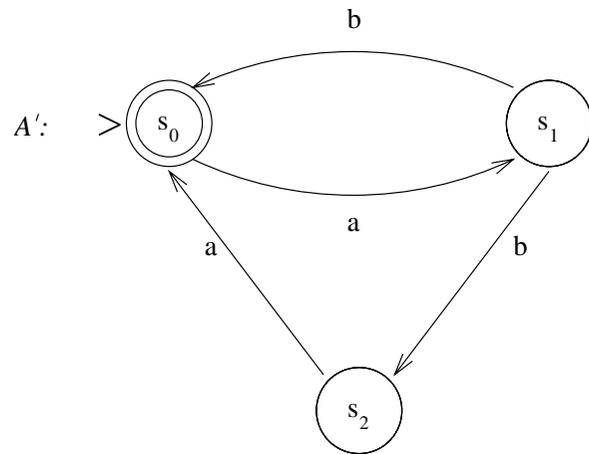
$$\begin{aligned} \Delta(S_0, a) &= \{S_1\} \\ \Delta(S_1, b) &= \{S_0, S_2\} \\ \Delta(S_2, a) &= \{S_0\} \end{aligned}$$

akzeptiert die Sprache

$$L = \{ab, aba\}^*$$

NDEA: Graphische Darstellung

Der indetermierte Automat aus Beispiel 12.4



Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

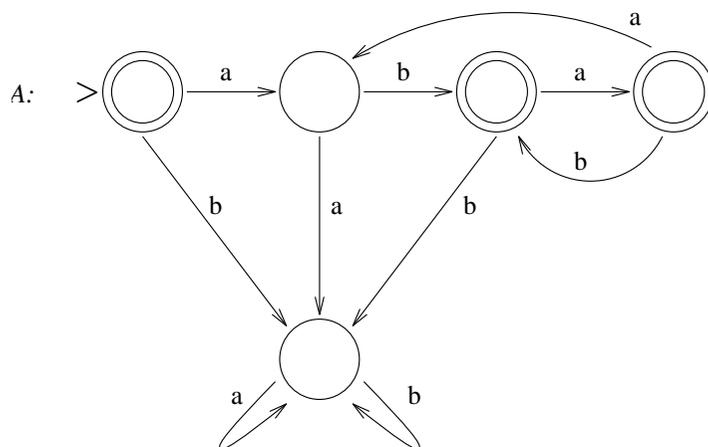
- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Zwei Sichtweisen auf indeterminierte Automaten

- Der Automat durchläuft **alle** Wege (**parallel** oder mittels **Backtracking**)
- Der Automat **rät**, welcher von mehreren möglichen Folgezuständen der richtige ist

NDEA und DEA: Beispiel

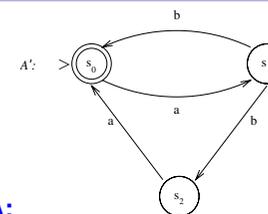
Beispiel 12.5 (DEA für gleiche Sprache wie NDEA aus Bsp. 12.4)



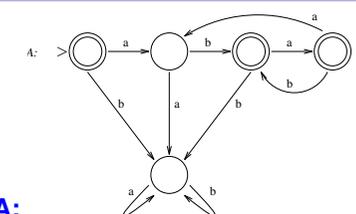
Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



NDEA:



DEA:

- DEA hat mehr Zustände, komplizierter
- DEA muss nicht „raten“
- DEA braucht genauso viele Schritte

NDEA und DEA

Wir zeigen später:

Für jeden indeterminierten Automaten A_{NDEA} gibt es einen determinierten Automaten A_{DEA} mit

$$L(A_{\text{NDEA}}) = L(A_{\text{DEA}})$$

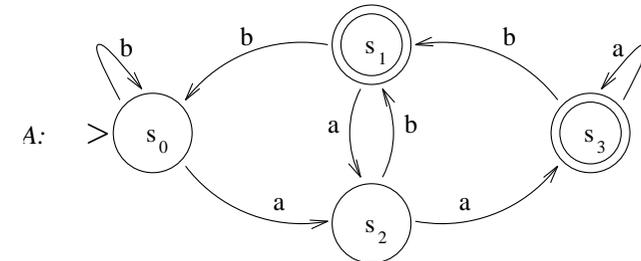
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Beispiel 12.6

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

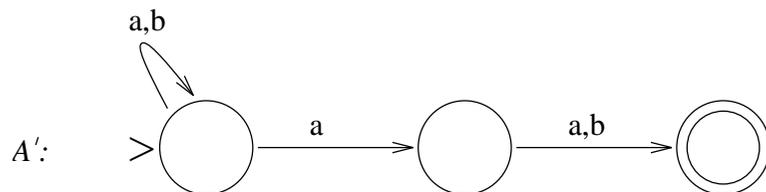
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Beispiel 12.7

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)



NDEA und DEA: Größenvergleich

Größenvergleich (Worst case)

Sprache über $\{a, b\}$ der Wörter, deren n -letzter Buchstabe ein a ist

Determinierter Automat: 2^n Zustände

(einen für jede Buchstabenkombination der Länge n)

Indeterminierter Automat: $n + 1$ Zustände

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem 12.8 (DEA gleich mächtig wie NDEA)

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis.

„ \Rightarrow “:

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

□

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

„ \Leftarrow “:

Sei

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat.

Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$.

Beweisidee:

Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ einen determinierten Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion . . .

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Fortsetzung . . .

- Zustände in \mathcal{A}_{DEA} bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ mit w nach q_1, \dots, q_n gelangt, dann gelangt man in \mathcal{A}_{DEA} mit w nach $q' = \{q_1, \dots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von \mathcal{A}_{DEA} :
Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Finale Zustände von \mathcal{A}_{DEA} :
Jede Menge von Zuständen, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ enthält