

Vorlesung
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /
 Einführung in die Theoretische Informatik I**

Bernhard Beckert

Institut für Informatik



Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

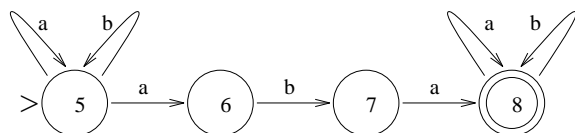
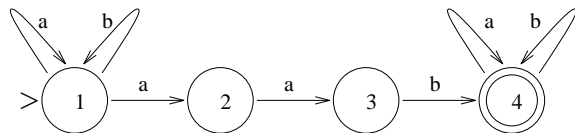
– *Bernhard Beckert, April 2007*

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:

Menge der alten Startzustände, also $\{1, 5\}$.

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 5, 6\}$ mit

$$\delta_{A_{DEA}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit b .

$$\Delta(1, b) = \{1\}$$

$$\Delta(5, b) = \{5\}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt \mathcal{A}_{DEA} also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 2, 5, 6\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(2, a) = \{3\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

$$\Delta(6, a) = \emptyset$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ mit

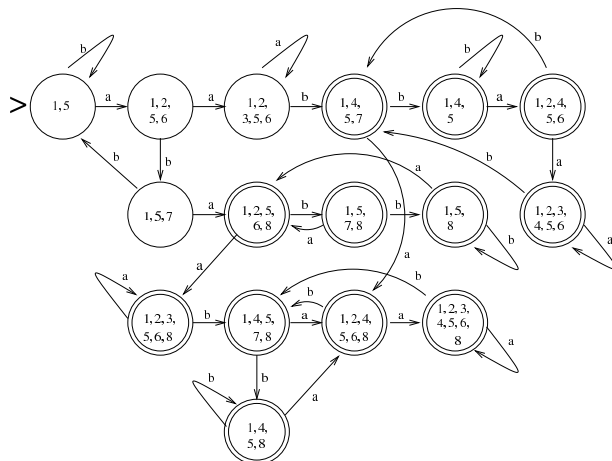
$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat \mathcal{A}_{DEA} :



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \rightarrow 2^K \quad \text{mit} \quad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automata

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subset K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
(alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automata

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Beweis durch Induktion über die Länge von w :

Induktionsanfang:

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} & \delta'^*(M, wa) \\ &= \delta'(\delta'^*(M, w), a) && \text{Def. von } * \\ &= \bigcup_{p \in \delta'^*(M, w)} \Delta(p, a) && \text{Definition von } \delta' \\ &= \bigcup_{p \in (\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w))} \Delta(p, a) && \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\ &= \{q' \mid \exists q \in M \exists p \in \Delta^*(q, w) q' \in \Delta(p, a)\} \\ &= \{q' \mid \exists q \in M q' \in \Delta^*(q, wa)\} && \text{Def. von } * \\ &= \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) \end{aligned}$$

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$

gdw $\delta'^*(I', w) \in F'$ (Def. der Sprache eines Automaten)

gdw $\delta'^*(I, w) \in F'$ (da $I' = I$ per Def.)

gdw $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Def. von F')

gdw $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$ (nach Lemma)

gdw $\exists q \in I \exists q' \in F (q' \in \Delta^*(q, w))$

gdw $w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ (Def. der Sprache eines Automaten)

Damit: $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ □

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 **Automaten mit epsilon-Kanten**
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping Lemma
- 6 Wortprobleme
- 7 Rational = Regulär

Automaten mit ϵ -Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ϵ -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (Automat mit ϵ -Kanten): Kanten mit einem **Wort** beschriftet

Es darf auch das leere Wort ϵ sein!

Ein Automaten mit ϵ -Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ϵ -Kanten: Definition

Definition 13.1 (Automat mit ϵ -Kanten)

Ein **Automat mit ϵ -Kanten (ϵ -NDEA)** A ist ein Tupel

$$A = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε -Kanten: Übergangsrelation

Definition 13.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\begin{aligned} \Delta^*((q, \varepsilon), q') & \text{ gdw } q' = q \text{ oder } \Delta((q, \varepsilon), q') \\ \Delta^*((q, w_1 w_2), q') & \text{ gdw } \exists q'' \in K \\ & \quad \Delta^*((q, w_1), q'') \vee \Delta((q, w_1), q'') \\ & \quad \wedge \\ & \quad \Delta^*((q'', w_2), q') \vee \Delta((q'', w_2), q') \end{aligned}$$

Automaten mit ε -Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition 13.3 (Von ε -NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten mit ε -Kanten

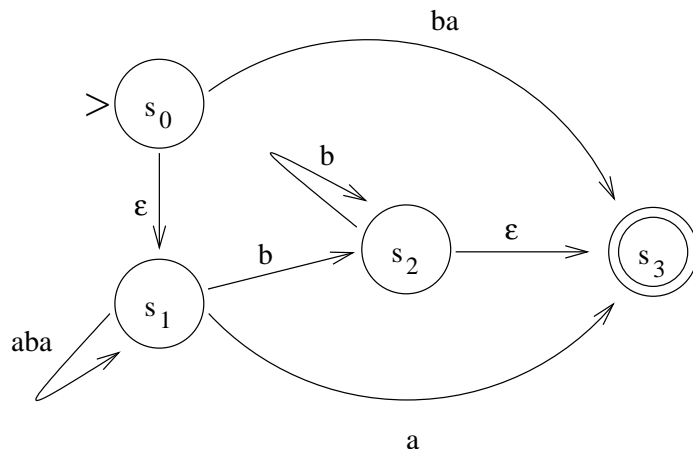
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*((s_0, w) q) \}$$

Automaten mit ε -Kanten: Beispiel

Beispiel 13.4 (Automaten mit ε -Kanten)



Akzeptiert: $\{aba\}^* \{b\} \{b\}^* + \{aba\}^* \{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε -Kanten und NDEAs

Theorem 13.5 (ε -NDEA gleich mächtig wie NDEA)

Zu jedem Automaten mit ε -Kanten \mathcal{A} existiert ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A}' mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Beweis.

Transformation von \mathcal{A} in einen NDEA ohne ε -Kanten

1 Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert \rightarrow beibehalten
- mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) \rightarrow ersetze durch n Übergänge (verwende $n - 1$ neue, zusätzlicher Zustände)
- ε -Übergänge \rightarrow statt diesen

$$\Delta((q, a), q'')$$

für jedes Paar

$$\Delta((q, a), q') \text{ und } \Delta((q', \varepsilon), q'')$$

□

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε -Kanten und NDEAs

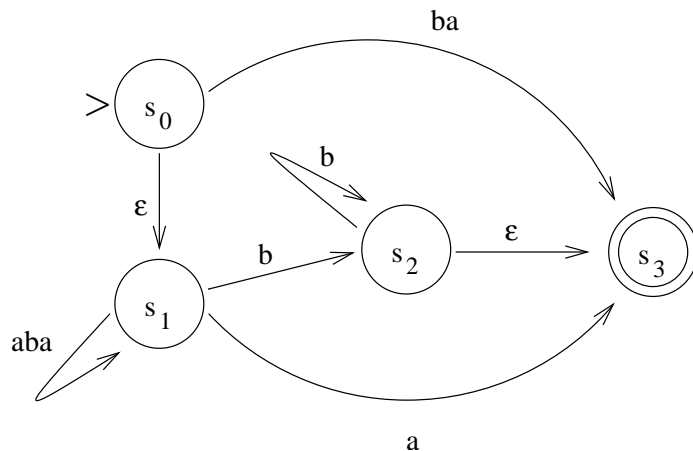
Beweis (Fortsetzugn)

Transformation von \mathcal{A} in einen NDEA ohne ε -Kanten

- 2 Zusätzliche Initialzustände:
Falls $q \in I$ und $\Delta^*((q, \varepsilon), q')$, dann auch $q' \in I$
- 3 Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

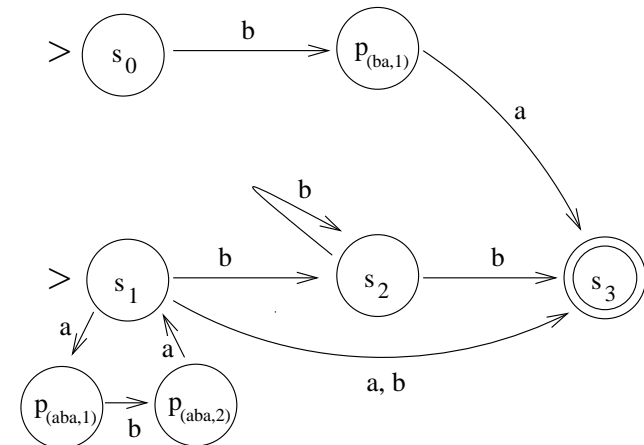
Beispiel 13.6 (Der Automat mit ε -Kanten ...)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel 13.7 (... wird transformiert in den äquivalenten NDEA)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen**
- 5 Pumping Lemma
- 6 Wortprobleme
- 7 Rational = Regulär

Theorem 14.1 (Satz von Kleene: $RAT = L_3$)

Eine Sprache L ist rational gdw L ist regulär.

Merke:

L ist rational heißt: es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

L ist regulär heißt: es gibt eine linkslineare Grammatik für L

Satz von Kleene

Stephen Cole Kleene ★ 1909, † 1994

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
Erfinder der Regulären Ausdrücke

