Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

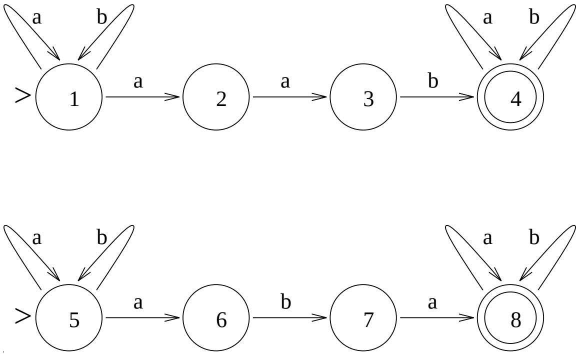
– Bernhard Beckert, April 2007

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:

Menge der alten Startzustände, also $\{1,5\}$.

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1,5\}$ mit a

$$\Delta(1,a) = \{1,2\}$$
$$\Delta(5,a) = \{5,6\}$$

Also, neuer Zustand $\{1,2,5,6\}$ mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}}(\{1,5\},a) = \{1,2,5,6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1,5\}$ mit b.

$$\Delta(1,b) = \{1\}$$
$$\Delta(5,b) = \{5\}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1,2,5,6\}$ mit a

$$\Delta(1,a) = \{1,2\}$$
$$\Delta(2,a) = \{3\}$$
$$\Delta(5,a) = \{5,6\}$$
$$\Delta(6,a) = \emptyset$$

Also, neuer Zustand $\{1,2,3,5,6\}$ mit

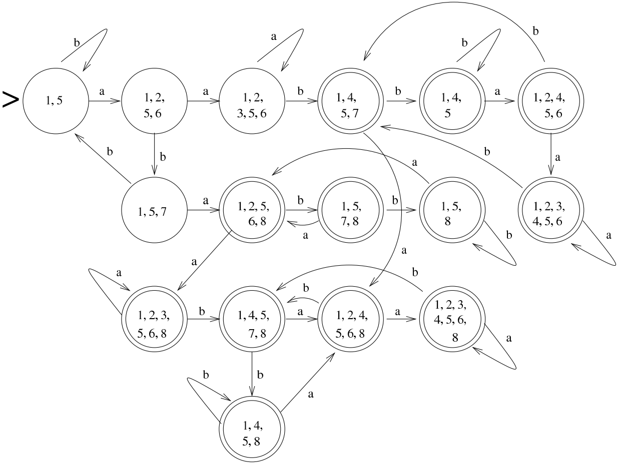
$$\delta_{\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}}(\{1,2,5,6\},a) = \{1,2,3,5,6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$:



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \to 2^K \quad \text{mit} \quad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automa

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subset K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
  (alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automa

$$\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Beweis durch Induktion über die Länge von w:

Induktionsanfang:

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{array}{rll}
 & \delta'^*(M, wa) & \\
= & \delta'(\delta'^*(M, w), a) & \text{Def. von } ^* \\
= & \bigcup_{p \in \delta'^*(M,w)} \Delta(p, a) & \text{Definition von } \delta' \\
= & \bigcup_{p \in (\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q,w))} \Delta(p, a) & \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\
= & \{q' \mid \exists q \in M \; \exists p \in \Delta^*(q, w) \; q' \in \Delta(p, a)\} & \\
= & \{q' \mid \exists q \in M \; q' \in \Delta^*(q, wa)\} & \text{Def. von } ^* \\
= & \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) &
\end{array}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$w \in L(\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}})$

gdw $\delta'^*(I', w) \in F'$ (Def. der Sprache eines Automaten)

gdw $\delta'^*(I, w) \in F'$ (da $I' = I$ per Def.)

gdw $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Def. von F')

gdw $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$ (nach Lemma)

gdw $\exists q \in I \, \exists q' \in F \; \big(q' \in \Delta^*(q, w)\big)$

gdw $w \in L(\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}})$ (Def. der Sprache eines Automaten)

Damit: $L(\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}})$ $\square$

Teil III

1. Determinierte endliche Automaten (DEAs)
2. Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
3. **Automaten mit epsilon-Kanten**
4. Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
5. Pumping Lemma
6. Wortprobleme
7. Rational = Regulär

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automaten mit ε-Kanten kann . . .

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε-Kanten: Definition

Definition 13.1 (Automat mit ε-Kanten)

Ein **Automat mit ε-Kanten (ε-NDEA)** *A* ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε-Kanten: Übergangsrelation

Definition 13.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta(\ (q, \varepsilon),\ q'\ )$$

$$\begin{aligned} \Delta^*(\ (q, w_1 w_2),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad & \exists q'' \in K \\ & \quad \Delta^*(\ (q, w_1),\ q''\ ) \lor \Delta(\ (q, w_1),\ q''\ ) \\ & \quad \land \\ & \quad \Delta^*(\ (q'', w_2),\ q'\ ) \lor \Delta(\ (q'', w_2),\ q'\ ) \end{aligned}$$

Automaten mit ε-Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition 13.3 (Von ε-NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten mit ε-Kanten

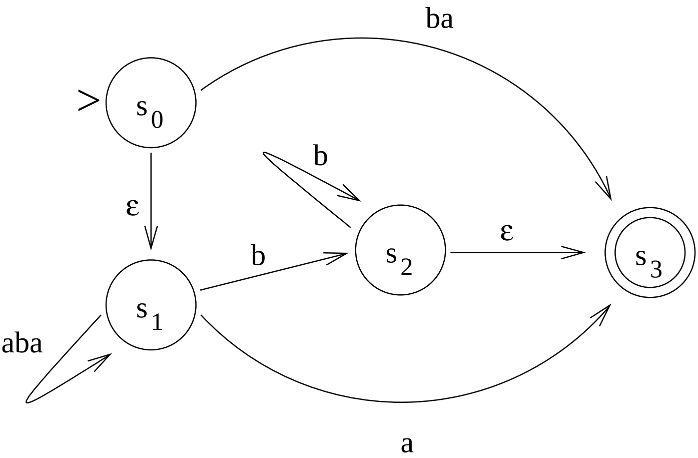
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{ \, w \in \Sigma^* \;\mid\; \exists s_0 \in I \exists q \in F \;\; \Delta^*(\, (s_0, w) \, q) \, \}$$

Automaten mit ε-Kanten: Beispiel

Beispiel 13.4 (Automaten mit ε-Kanten)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem 13.5 (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)

Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Beweis.

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

1. Ersetze Übergänge:
   - mit nur einem Buchstaben markiert $\longrightarrow$ beibehalten
   - mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) $\longrightarrow$ ersetze durch n Übergänge (verwende $n-1$ neue, zusätzlicher Zustände)
   - ε-Übergänge $\longrightarrow$ statt diesen

     $$\Delta(\,(q,a),\ q''\,)$$

     für jedes Paar

     $$\Delta(\,(q,a),\ q'\,) \quad \text{und} \quad \Delta(\,(q',\varepsilon),\ q''\,)$$

□

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

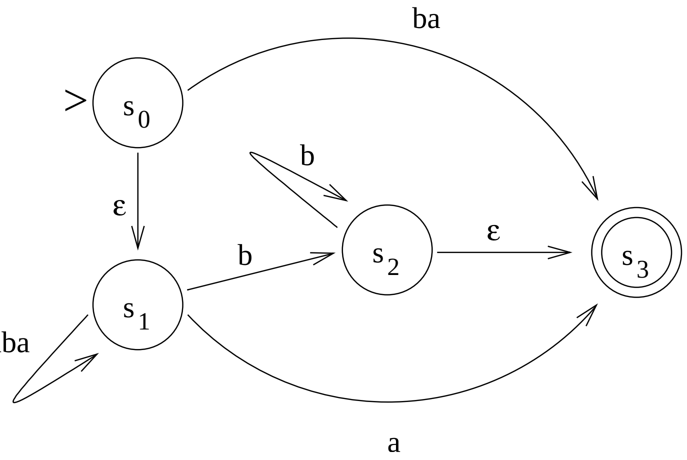
Beweis (Fortsetzugn)

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

2. Zusätzliche Initialzustände:
   Falls $q \in I$ und $\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q')$, dann auch $q' \in I$
3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

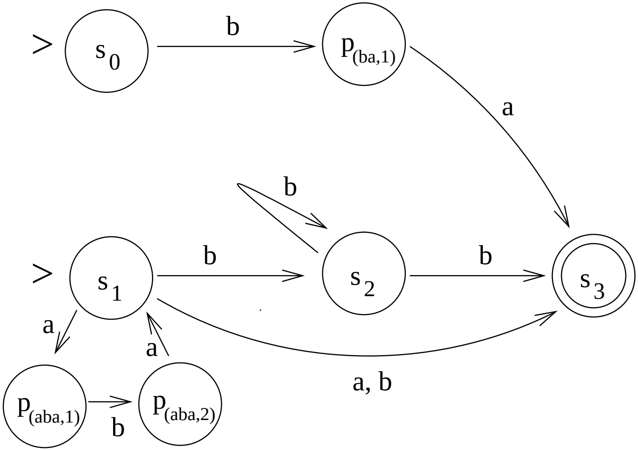
Beispiel 13.6 (Der Automat mit ε-Kanten . . .)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel 13.7 (… wird transformiert in den äquivalenten NDEA)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Teil III

1. Determinierte endliche Automaten (DEAs)
2. Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
3. Automaten mit epsilon-Kanten
4. **Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen**
5. Pumping Lemma
6. Wortprobleme
7. Rational = Regulär

Satz von Kleene

Theorem 14.1 (Satz von Kleene: RAT = L_3)

Eine Sprache L ist rational <u>*gdw*</u> *L ist regulär.*

Merke:

L **ist rational heißt:** es gibt einen endlichen Automaten, der *L* akzeptiert

L **ist regulär heißt:** es gibt eine linkslineare Grammatik für *L*

Satz von Kleene

Stephen Cole Kleene $\star$ **1909,** $\dagger$ **1994**

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton
  (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
  Erfinder der Regulären Ausdrücke