Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Satz von Kleene

Beweis

„$\Rightarrow$“ zu zeigen:

Wenn eine Sprache L von einem endlichen Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, ist sie regulär (wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert).

Sei also $L = L(\mathcal{A})$ für einen endlichen Automaten

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

Dazu konstruieren wir eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$:

Automat $\mathcal{A}$:	in **Zustand q**,	**liest a**,	geht in **Zustand q'**
Grammatik:	**Endvariable q**,	**erzeugt a**	neue **Endvariable q'**

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Formale Definition der Grammatik:

$$V := K$$
$$T := \Sigma$$
$$S := s_0$$
$$R := \{\, q \to aq' \mid \delta(q,a) = q' \,\} \cup \{\, q \to \varepsilon \mid q \in F \,\}$$

Durch Induktion über die Länge eines Wortes w:

$$S \Longrightarrow_G^* wq \quad \underline{\text{gdw}} \quad \delta^*(s_0, w) = q$$

Daraus:
$$\begin{aligned} S \Longrightarrow_G^* w \quad & \underline{\text{gdw}} \quad \exists q \in F \left(S \Longrightarrow_G^* wq \Longrightarrow w \right) \\ & \underline{\text{gdw}} \quad \exists q \in F \left(\delta(s_0, w) = q \right) \\ & \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

„$\Leftarrow$“ zu zeigen:

Wenn eine Sprache L regulär ist
(sie wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert),
dann gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ der sie akzeptiert.

Sei also $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik

$$G = (V, T, R, S)$$

Dazu konstruieren wir einen ε-NDEA $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit:

$$K := V \cup \{q_{stop}\} \qquad (q_{stop} \text{ neu})$$
$$I := \{S\}$$
$$\Sigma := T$$
$$F := \{q_{stop}\}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Definition von Δ:

$$\Delta(\ (X,u),\ X'\ ) \ :\Longleftrightarrow_{def}\ X \to uX' \in R$$
$$\Delta(\ (X,u),\ q_{stop}\ ) \ :\Longleftrightarrow_{def}\ X \to u \in R$$

für $X, X' \in K$ und $u \in \Sigma^*$

Durch Induktion über die Länge einer Ableitung:

$$S \Longrightarrow_G^* w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Delta^*(\ (S,w),\ q_{stop}\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Wegen Gleichmächtigkeit von ε-NDEA- mit DEA-Automaten gibt es dann auch einen determinierten endlichen Automaten, der L akzeptiert.

□

Satz von Kleene

Beispiel 14.2

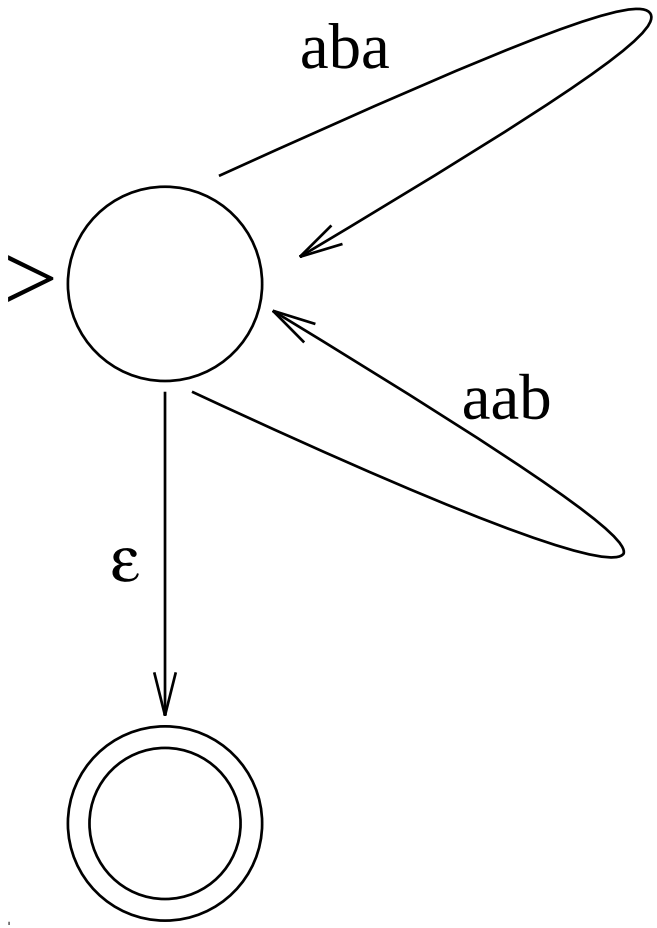
Grammatik G mit Regeln

$$S \to abaS$$
$$S \to aabS$$
$$S \to \varepsilon$$

Sprache

$$L(G) = \{aba, aab\}^*$$

ε-NDEA:



Teil III

Pumping-Lemma

„Aufpumpbarkeit“ (informell)

Lange Wörter $x \in L$ lassen sich zerlegen

$$x = uvw \qquad |v| \geq 1$$

so dass

$$u \underbrace{vv \ldots v}_{i \text{ mal}} w = uv^m w$$

wieder in L liegt (für alle $m \geq 1$)

Pumping-Lemma

Pumping Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass alle Wörter

$$w \in L \qquad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Anwendung

- Wichtige Information über die Struktur regulärer Sprachen
- Nachweis der Nicht-Regularität von Sprachen:
  Wenn das Pumping-Lemma für eine Sprache nicht gilt,
  dann kann sie nicht regulär sein

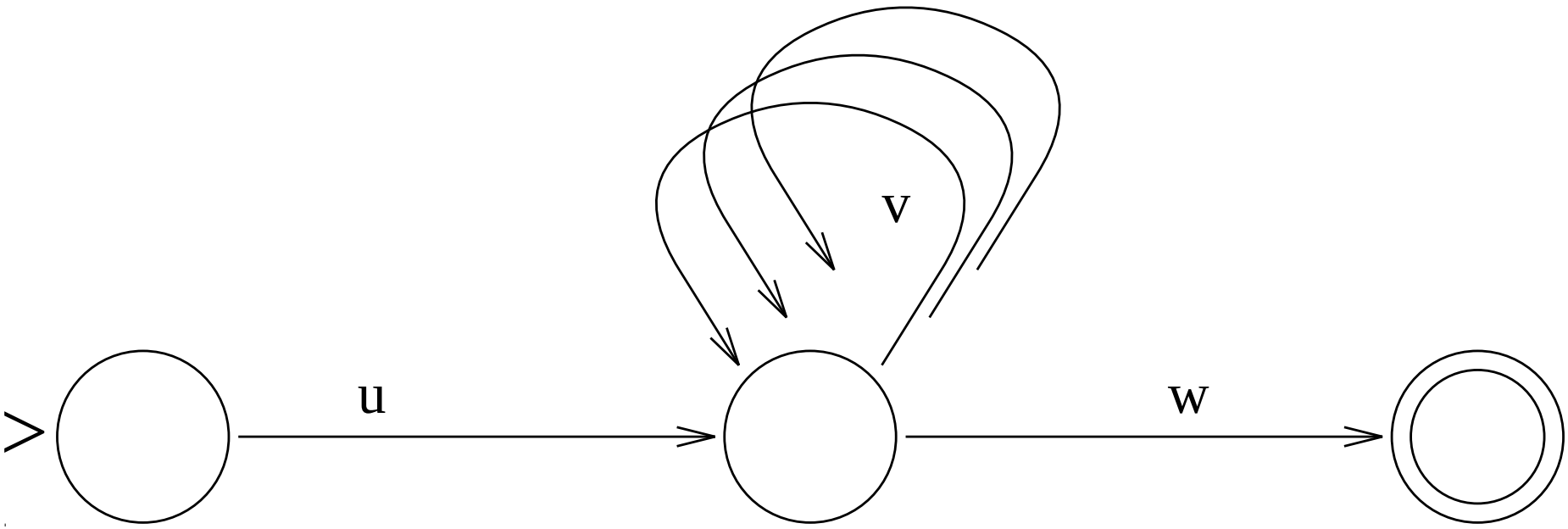
Pumping-Lemma: Intuition

Warum gilt das Pumping-Lemma?

- Zu regulärer Sprache L gibt es einen DEA, der L akzeptiert
- Dieser hat endliche Zustandsmenge K.
  Sei $m := |K|$.
- Wenn $|w| > |K|$, dann muss beim Akzeptieren von w eine Schleife durchlaufen werden.
- Die Schleife kann auf mehrfach durchlaufen werden.
- Das Teilwort v, das der Schleife entspricht kann aufgepumpt werden.

Pumping-Lemma: Intuition

Abstrakt gesehen



Pumping-Lemma: Formal

Theorem 15.1 (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen)

*Sei $L \in$ **RAT**.*
Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \textit{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis

Sei L eine reguläre Sprache.

1. Fall: L ist endlich.

Sei w_{max} das längste Wort in L.

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter $x \in L$, für die $|x| \geq n$ gilt.

Also gilt dann Pumping-Lemma trivialerweise.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

2. Fall: L ist unendlich.

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der L akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x = x_1 x_2 \dots x_t \in L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

Zu zeigen: x lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \dots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von x durchlaufen werden:

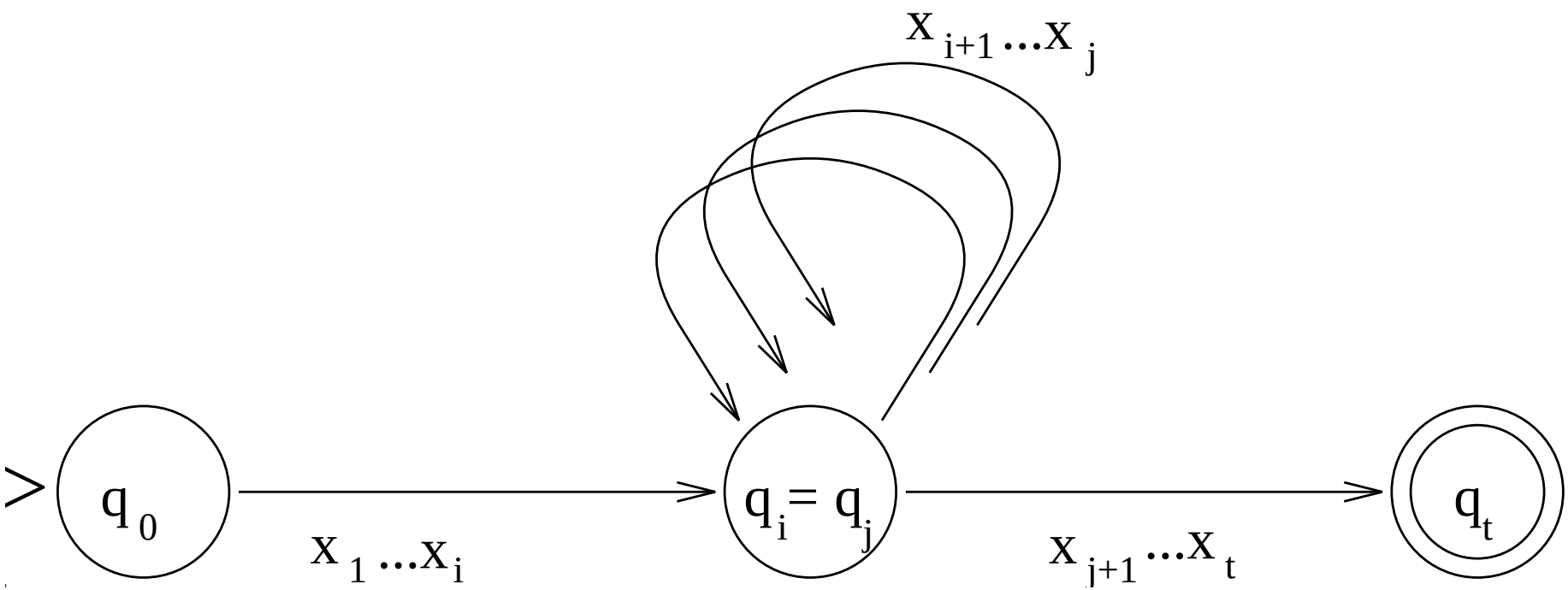
$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \ \ \forall 0 \leq i \leq t-1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da $t \geq |K| + 1$, muss es $0 \leq i < j \leq t - 1$ geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$



Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left.\begin{aligned} u &:= x_1 \dots x_i \\ v &:= x_{i+1} \dots x_j \\ w &:= x_{j+1} \dots x_t \end{aligned}\right\} \qquad x = uvw \text{ mit } 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle $m \geq 0$ gibt es Wege

$$q_0, \dots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \dots, q_j = q_i, \dots, q_j = \cdots = q_i \dots, q_j}_{m \text{ mal}}, q_{j+1}, \dots, q_t$$

- Also: $uv^m w$ wird von $\mathcal{A}$ akzeptiert.
- Also: $uv^m w \in L$

Pumping-Lemma: Umkehrung

Korollar

Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt,
dann ist sie **nicht** regulär.

Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.
- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt,
  folgt **nicht**, dass sie regulär ist.