

Vorlesung  
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /  
Einführung in die Theoretische Informatik I**

**Bernhard Beckert**

Institut für Informatik



**Sommersemester 2007**

Teil I

- 1 Organisatorisches
- 2 Motivation, Inhalt der Vorlesung
- 3 Kurzer Überblick: Logik
- 4 Kurzer Überblick: Beweismethoden und Mathematische Konzepte
- 5 Kurzer Überblick: Beweismethoden und Mathematische Konzepte**

## Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

**Katrin Erk** (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

**Jürgen Dix** (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

## Wichtige Beweismethoden

### Deduktiver Beweis

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen  $A_i$  müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
  - Annahmen aus  $A$
  - mathematische Grundgesetze
  - bereits bewiesene Aussagen
  - logische Schlussfolgerungen

## Wichtige Beweismethoden

### Beispiel 5.1 (Deduktiver Beweis)

#### Zu beweisen:

Wenn  $x$  die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt  $2^x \geq x^2$

#### Beweis in schematischer Darstellung:

Aussage	Begründung
1. $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2. $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3. $a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4. $x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5. $2^x \geq x^2$	(4) und Satz aus der Analysis

## Wichtige Beweismethoden

### Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass **nicht A** aus der Annahme **nicht B** folgt:

$$\neg B \Rightarrow \neg A \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \Rightarrow B$$

### Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus **A und nicht B** ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \text{false} \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \Rightarrow B$$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu  $\forall$ -Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

## Wichtige Beweismethoden

### Induktionsbeweise

#### Standardinduktion:

Gilt  $A(0)$  und  
folgt  $A(i+1)$  aus  $A(i)$ ,  
dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

#### Vollständige Induktion:

Gilt  $A(0)$  und  
folgt  $A(i+1)$  aus  $A(0) \wedge \dots \wedge A(i)$ ,  
dann gilt  $A(n)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

#### Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

Gilt  $A$  für das Basiselement und  
folgt die Gültigkeit von  $A$  für ein beliebiges Element aus der  
Gültigkeit von  $A$  für seine Unterelemente,  
dann gilt  $A$  für alle Elemente.

## Mathematische Konzepte

### Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare **Mengentheorie**
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup, \cap, \setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen (**wichtig!**)
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

## Funktionen

**Funktion**  $f : S \rightarrow S'$ : Abbildung zwischen den Grundmengen  $S$  und  $S'$ ,  
nicht unbedingt auf allen Elementen von  $S$  definiert

**Definitionsbereich**  $D$

**Wertebereich**  $W$

**$f$  eine totale Funktion:**  $f$  für alle Elemente des Wertebereichs  $W$  definiert

$$\forall x \in D \exists y \in W (x, y) \in f$$

**Injektiv, surjektiv, bijektiv**