

Vorlesung
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /
Einführung in die Theoretische Informatik I**

Bernhard Beckert

Institut für Informatik



Sommersemester 2007

Teil I

- 1 Organisatorisches
- 2 Motivation, Inhalt der Vorlesung
- 3 Kurzer Überblick: Logik
- 4 Kurzer Überblick: Beweismethoden und Mathematische Konzepte
- 5 Kurzer Überblick: Beweismethoden und Mathematische Konzepte**

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
 - Annahmen aus A
 - mathematische Grundgesetze
 - bereits bewiesene Aussagen
 - logische Schlussfolgerungen

Wichtige Beweismethoden

Beispiel 5.1 (Deduktiver Beweis)

Zu beweisen:

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beweis in schematischer Darstellung:

Aussage	Begründung
1. $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2. $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3. $a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4. $x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5. $2^x \geq x^2$	(4) und Satz aus der Analysis

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass **nicht A** aus der Annahme **nicht B** folgt:

$$\neg B \Rightarrow \neg A \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \Rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus **A und nicht B** ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \text{false} \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \Rightarrow B$$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu \forall -Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Induktionsbeweise

Standardinduktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(0) \wedge \dots \wedge A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

Gilt A für das Basiselement und
folgt die Gültigkeit von A für ein beliebiges Element aus der
Gültigkeit von A für seine Unterelemente,
dann gilt A für alle Elemente.

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare **Mengentheorie**
 - $\{x | P(x)\}$
 - \cup, \cap, \setminus
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen (**wichtig!**)
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Funktionen

Funktion $f : S \rightarrow S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S' ,
nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x \in D \exists y \in W (x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv