Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Teil I

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
  - Annahmen aus A
  - mathematische Grundgesetze
  - bereits bewiesene Aussagen
  - logische Schlussfolgerungen

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
  - Annahmen aus A
  - mathematische Grundgesetze
  - bereits bewiesene Aussagen
  - logische Schlussfolgerungen

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
  - Annahmen aus A
  - mathematische Grundgesetze
  - bereits bewiesene Aussagen
  - logische Schlussfolgerungen

Wichtige Beweismethoden

Beispiel 5.1 (Deduktiver Beweis)

Zu beweisen:

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beweis in schematischer Darstellung:

	Aussage	Begründung
1.	$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2.	$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3.	$a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4.	$x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5.	$2^x \geq x^2$	(4) und Satz aus der Analysis

Wichtige Beweismethoden

Beispiel 5.1 (Deduktiver Beweis)

Zu beweisen:

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beweis in schematischer Darstellung:

	Aussage	Begründung
1.	$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	*Gegeben*
2.	$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	*Gegeben*
3.	$a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	*(2) und Gesetze der Arithmetik*
4.	$x \geq 4$	*(1), (3) und Gesetze der Arithmetik*
5.	$2^x \geq x^2$	*(4) und Satz aus der Analysis*

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass nicht A aus der Annahme nicht B folgt:

$$\neg B \Rightarrow \neg A \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus A und nicht B ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \mathit{false} \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu $\forall$-Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass nicht A aus der Annahme nicht B folgt:

$$\neg B \Rightarrow \neg A \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus A und nicht B ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \mathit{false} \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu $\forall$-Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass nicht A aus der Annahme nicht B folgt:

$\neg B \Rightarrow \neg A$ logisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$

Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus A und nicht B ein Widerspruch folgt:

$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \mathit{false}$ logisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu $\forall$-Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beweise, dass nicht A aus der Annahme nicht B folgt:

$$\neg B \Rightarrow \neg A \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Beweise, dass aus A und nicht B ein Widerspruch folgt:

$$(A \land \neg B) \Leftrightarrow \mathit{false} \qquad \text{logisch äquivalent zu} \qquad A \Rightarrow B$$

- A kann „leer“ sein
- Widerspruch zu $\forall$-Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Induktionsbeweise

Standardinduktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(0) \wedge \ldots \wedge A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern:

Gilt A für das Basiselement und
folgt die Gültigkeit von A für ein beliebiges Element aus der Gültigkeit von A für seine Unterelemente,
dann gilt A für alle Elemente.

Wichtige Beweismethoden

Induktionsbeweise

Standardinduktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(0) \wedge \ldots \wedge A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern:

Gilt A für das Basiselement und
folgt die Gültigkeit von A für ein beliebiges Element aus der Gültigkeit von A für seine Unterelemente,
dann gilt A für alle Elemente.

Wichtige Beweismethoden

Induktionsbeweise

Standardinduktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i+1)$ aus $A(0) \wedge \ldots \wedge A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern:

Gilt A für das Basiselement und
folgt die Gültigkeit von A für ein beliebiges Element aus der Gültigkeit von A für seine Unterelemente,
dann gilt A für alle Elemente.

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare Mengentheorie
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup$, $\cap$, $\setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen **(wichtig!)**
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare Mengentheorie
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup$, $\cap$, $\setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen **(wichtig!)**
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare Mengentheorie
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup$, $\cap$, $\setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen **(wichtig!)**
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare Mengentheorie
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup$, $\cap$, $\setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen **(wichtig!)**
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Mathematische Konzepte

Grundkonzepte (z.B. aus DAS)

- Elementare Mengentheorie
  - $\{x | P(x)\}$
  - $\cup$, $\cap$, $\setminus$
- Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen **(wichtig!)**
- Elementare Gesetze der Algebra
- Strukturen wie Listen, (endliche) Folgen, Graphen, Bäume
- Wörter (Strings)

Funktionen

Funktion $f : S \to S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S', nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x \in D \, \exists y \in W \; (x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Mathematische Konzepte

Funktionen

Funktion $f : S \to S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S', nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x{\in}D\;\exists y{\in}W\;(x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Funktionen

Funktion $f : S \to S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S',
nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x{\in}D\ \exists y{\in}W\ (x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Mathematische Konzepte

Funktionen

Funktion $f : S \to S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S',
nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x \in D \, \exists y \in W \, (x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Mathematische Konzepte

Funktionen

Funktion $f : S \rightarrow S'$: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S',
nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert

Definitionsbereich D

Wertebereich W

f eine totale Funktion: f für alle Elemente des Wertebereichs W definiert

$$\forall x \in D \; \exists y \in W \; (x, y) \in f$$

Injektiv, surjektiv, bijektiv