Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beispiel 15.2

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

1. $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
2. $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1

Zu

$$L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Annahme: L_1 ist regulär.

Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort

$$a^n b a^n \in L_1$$

aufpumpen lassen (da $|a^n b a^n| \geq n$).

Sei $a^n b a^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i ba^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.
Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i ba^n = a^{k+2j+i} ba^n = a^{n+j} ba^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

2. Fall: $u = a^n ba^i, v = a^j, w = a^k$
Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

3. Fall: $u = a^k, v = a^j ba^i, w = a^l$ mit $k + j = i + l = n$ und $i, j, k, l \geq 0$
Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^j ba^i a^j ba^i a^l = a^{k+j} ba^{i+j} ba^{i+l} \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

Also: Annahme falsch.

Also: L_1 nicht regulär. $\square$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2

Zu

$$L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

Annahme: L_2 ist regulär.

Dann gilt für L_2 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich jedes Wort

$$a^p \in L_2 \quad \text{mit} \quad p \geq n$$

aufpumpen lassen.

Sei $a^p = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Sei

$$a^p = uvw = a^i a^j a^k$$

also

$$i + j + k = p \geq n \qquad \text{und} \qquad 0 < j < n$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 1: $i + k > 1$.

Pumpe $(i + k)$ mal:

$$uv^{i+k}w = a^i a^{j(i+k)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(i + k) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch**:

$$\begin{aligned} i + j(i + k) + k &= i + ij + jk + k \\ &= i(1 + j) + (j + 1)k \\ &= i(1 + j) + k(1 + j) \\ &= (i + k)(1 + j) \end{aligned}$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 2: $i + k = 1$.

Pumpe $(j+2)$ mal:

$$uv^{j+2}w = a^i a^{j(j+2)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(j+2) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch!**:

$$\begin{aligned} i + j(j+2) + k &= 1 + j(j+2) \\ &= 1 + 2j + j^2 \\ &= (1+j)^2 \end{aligned}$$

Also: Annahme falsch. L_2 nicht regulär. □

Pumping-Lemma: Stärkere Variante

Theorem 15.3 (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen, stärkere Variante)

Sei $L \in \boldsymbol{RAT}$.
Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n$ *(statt $|v| < n$)*
- $uv^m w \in L$ *für alle $m \in \mathbb{N}$*

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel 15.4 (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

Teil III

Abschlusseigenschaften

Lemma 16.1

Seien zwei reguläre Sprachen L, L' gegeben.
Dann kann folgende endlichen Automaten konstruieren:

- $\mathcal{A}_\neg$ *akzeptiert* $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$
- $\mathcal{A}_\cup$ *akzeptiert* $L \cup L'$
- $\mathcal{A}_\circ$ *akzeptiert* $L \circ L'$
- $\mathcal{A}_*$ *akzeptiert* L^*
- $\mathcal{A}_\cap$ *akzeptiert* $L \cap L'$

Beweis.

An Tafel. □