Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Teil II

Probleme über Sprachen

Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?

Probleme und Algorithmen im allgemeinen

Definition 9.1 (Problem, Algorithmus)

Ein **Problem** P ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbaren Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt o gilt: die Eigenschaft trifft auf o zu oder nicht.

Definition 9.2 (Algorithmus)

Ein **Algorithmus** für ein Problem P ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt o berechnet, ob die Eigenschaft für o zutrifft oder nicht.

Probleme und Algorithmen im allgemeinen

Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für $n \in \mathbb{N}$:
  Ist n eine Primzahl?
- Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und
  ein Element G aus der Menge aller Grammatiken über Σ:
  Gilt $w \in L(G)$?
- Für ein Element G aus der Menge aller Grammatiken:
  Ist $L(G)$ leer (endlich, unendlich)?
- Für $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$:
  Hat $a^n + b^n = c^n$ eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm p aus der Menge aller Java-Programme:
  Terminiert p?

Teil II

Abzählbarkeit

Definition 10.1 (Abzählbarkeit)

Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn

- es eine surjektive Funktion

  $$f : \mathbb{N}_0 \to M$$

  gibt,
- oder M leer ist.

Intuition

Eine Menge ist abzählbar, wenn sie höchstens so mächtig wie $\mathbb{N}_0$ ist.

Abzählbarkeit

Lemma 10.2

Eine Menge M ist abzählbar, wenn es eine injektive Funktion

$$f : M \to \mathbb{N}_0$$

gibt.

Abzählbarkeit

Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereiningung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

Hilberts Hotel

David Hilbert ⋆ 1862, † 1943

- Einer der bedeutensten und einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten
- Professor in Königsberg und Göttingen
- Wichtige Beiträge zu
  – Logik
  – Funktionalanalysis
  – Zahlentheorie
  – Mathematische Grundlagen der Physik
  – uvm.

Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

Theorem 10.4

Die Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis.

Wir zeigen, dass schon das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar ist.

Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \to [0, 1]$$

Dann sei

$$f(i) = 0, d_0^i d_1^i d_2^i \ldots$$

die Dezimaldarstellung der i-ten reellen Zahl. □

Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

Beweis.

Fortsetzung:
Wir definieren eine neue Zahl $d = 0, \overline{d}_0 \overline{d}_1 \overline{d}_2 \ldots$ durch

$$\overline{d}_n = \begin{cases} d_n^n + 1 & \text{falls } d_n^n < 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d unterscheidet sich in der n-ten Stelle von d_n.
Also $d \neq d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Also kommt d in der Aufzählung nicht vor. Widerspruch! □

Wieviele gibt es?

Wieviele
– Grammatiken
– Sprachen
– Algorithmen
gibt es überhaupt?

Mögliche Antworten

- Endlich viele
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

Lemma 10.5

Gegeben: Signatur Σ, endlich oder abzählbar unendlich

Dann ist Σ^* abzählbar unendlich.

Beweis.

Σ ist abzählbar, also ist Σ^i abzählbar, $i \in \mathbb{N}$.
Σ^* ist die Vereinigung der abzählbar vielen abzählbaren Mengen Σ^i. □

Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

Lemma 10.6

Gegeben: Signatur Σ, endlich oder abzählbar unendlich

Dann ist die Menge aller Grammatiken über Σ abzählbar unendlich

Beweis.

Grammatiken sind endlich und also als Wörter über einer geeigneten erweiterten Grammatik

$$\Sigma \cup V \cup \{\rightarrow, \ldots\}$$

darstellbar.

Die Menge der Wörter über dieser erweiterten Grammatik ist abzählbar (Lemma 10.5). □

Wieviele Algorithmen gibt es?

Lemma 10.7

Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.

Beweis.

Algorithmen müssen per Definition eine endliche Beschreibung haben.

Sie sind also als Wörter über einer Signatur Σ darstellbar
(für jedes abzählbare Σ).

Also sind sie abzählbar (Lemma 10.5). □

Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt es?

Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$C(i) \neq f_i(i)$

Also: C ist von allen f_i verschieden.

Widerspruch! □

Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt es?

Lemma 10.9

Es gibt überabzählbar viele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$.

Beweis.

Analog. □

Wieviele Sprachen gibt es?

Lemma 10.10

Gegeben eine Signatur Σ (endlich oder unendlich).

Die Menge der Sprachen über Σ ist überabzählbar.

Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über Σ gegeben:

$$w_1, w_2, \ldots$$

Dann kann man die Sprachen L über Σ mit den Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ identifizieren, vermittels

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele. □

Korollar

Korollar 10.11

Nicht jede Sprache kann durch eine Grammatik dargestellt werden.

Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur Σ

Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bzw. $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen