

Vorlesung
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /
Einführung in die Theoretische Informatik I**

Bernhard Beckert

Institut für Informatik



Sommersemester 2007

Inhalt von Teil III

- Vereinfachtes Modell eines Computers: **endlicher Automat**
- Die von endlichen Automaten erkannten „**rationalen**“ Sprachen sind genau die Typ-3-Sprachen (**rechtslinear**, **regulär**)
- **Determinierte** und **indeterminierte** endliche Automaten sind äquivalent
- **Pumping Lemma** erlaubt, eine Sprache als nicht rational nachzuweisen.
- Es gibt Algorithmen, die **Probleme über endlichen Automaten** bzw. Typ-3-Sprachen lösen.
- Typ-3-Sprachen sind genau die, die durch **reguläre Ausdrücke** beschrieben werden können.

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

Teil III

Endliche Automaten

- 1 **Determinierte endliche Automaten (DEAs)**
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Beispiel

Beispiel 11.1

Die Sprache

$$L = \{aa\}\{ab\}^*\{c\}$$

ist **regulär**.

Denn sie wird (z. B.) erzeugt von der **rechtslinearen** Grammatik

$$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, R, S),$$

mit Regelmengemenge R :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aaA \\ A &\rightarrow abA \mid c \end{aligned}$$

Grammatiken und Automaten

Grammatik vs. Automat

Grammatik: erzeugt Wörter

Automat: analysiert / erkennt Wörter

beide: beschreiben / definieren eine Sprachen

Beispiel

Beispiel 11.2

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen ist regulär.

Eine erzeugende Grammatik ist

$$G = (\{S, S_0, S_1, S_2\}, \{0, \dots, 9\}, R, S)$$

mit der Regelmengemenge R :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid 0 \\ S_0 &\rightarrow 0S_0 \mid 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid \varepsilon \\ S_1 &\rightarrow 0S_1 \mid 3S_1 \mid 6S_1 \mid 9S_1 \mid 1S_2 \mid 4S_2 \mid 7S_2 \mid 2S_0 \mid 5S_0 \mid 8S_0 \\ S_2 &\rightarrow 0S_2 \mid 3S_2 \mid 6S_2 \mid 9S_2 \mid 1S_0 \mid 4S_0 \mid 7S_0 \mid 2S_1 \mid 5S_1 \mid 8S_1 \end{aligned}$$

Ohne das ε in der zweiten Regel wäre nur die "0" als Terminalwort herleitbar.

Endlicher Automat: Informell

Endlicher Automat

- Ein endlicher Automat testet, ob ein gegebenes $w \in \Sigma^*$ in einer Sprache L liegt.
- **Lesekopf** erlaubt w zu lesen.
Bewegt sich nur von links nach rechts.
- Endlich viele mögliche **interne Zustände**,
immer einer davon ist der aktuelle Zustand
- Automat beginnt in einem **initialen Zustand**.
- Bei jedem gelesenen Buchstaben Übergang zu neuem aktuellen Zustand,
in Abhängigkeit vom Buchstaben und dem alten Zustand
- Wenn am Ende von w ein **finaler Zustand** erreicht ist,
ist w **akzeptiert** als Element von L ,
sonst nicht.
- Automat **stoppt** (auf jeden Fall) nach $|w|$ Schritten

Endlicher Automat: Modell eines einfachen Computers

Endlicher Automat: Computer mit begrenztem Speicher

- Kann vom Band nur lesen
⇒ kein externer Speicher
- Speichert nur den aktuellen Zustand (\approx Programmzähler)
⇒ stark begrenzter interner Speicher

Endlicher Automat: Darstellung als Graph

Darstellung als Graph

- ein **Knoten** für jeden **Zustand**
- **Kanten** beschreiben **Zustandsänderungen**, sind mit Buchstaben beschriftet
- **initiale** Zustände sind mit einem **Pfeil** gekennzeichnet
- **finale Zustände** mit einem **doppelten Kreis**

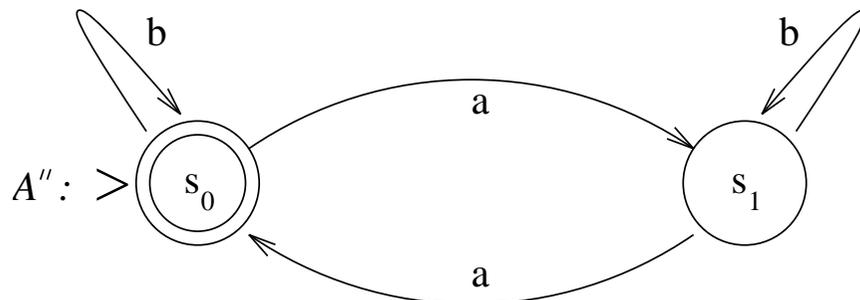
Endlicher Automat: Darstellung als Graph

Beispiel 11.3 (Sprache $\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a, b\}^*$)

Der folgende endliche Automat erkennt die Sprache

$$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \quad \text{über} \quad \Sigma = \{a, b\}$$

der Wörter mit gerader Anzahl von „a“s



Endlicher Automat: Definition

Definition 11.4 (Endlicher Automat)

Ein **endlicher Automat** (e.a., **finite automaton**) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von **Zuständen**
- Σ ein **endliches Alphabet**
(aus dessen Buchstaben die Eingabewörter bestehen können)
- $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$ die totale(!) **Übergangsfunktion**
- $s_0 \in K$ der **Startzustand**
- $F \subseteq K$ die Menge der **finalen Zustände**

Endlicher Automat: Übergangsfunktion

Bedeutung der Übergangsfunktion

$$\delta(q, a) = q'$$

bedeutet:

- Wenn der Automat im Zustand q ist
- und ein a liest,
- dann geht in den Zustand q' über.

Endlicher Automat: Übergangsfunktion

Definition 11.5 (Erweiterung von δ zu δ^*)

$$\delta^* : K \times \Sigma^* \rightarrow K$$

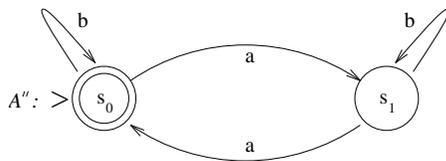
ist strukturell rekursiv über Σ^* definiert durch:

$$\delta^*(q, \epsilon) := q$$

$$\delta^*(q, wa) := \delta(\delta^*(q, w), a)$$

Endlicher Automat: Beispiel

Beispiel 11.6



Dieser Automat akzeptiert die Sprache

$$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a, b\}^*$$

(s. Bsp. 11.3).

Formal hat er die Form:

$$\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0\})$$

mit

$$\delta(s_0, a) = s_1 \quad \delta(s_1, a) = s_0$$

$$\delta(s_0, b) = s_0 \quad \delta(s_1, b) = s_1$$

Endlicher Automat: Übergangsfunktion

Beispiel 11.7 (Beispiel für δ^*)

$$\begin{aligned} \delta^*(s_0, aab) &= \delta(\delta^*(s_0, aa), b) \\ &= \delta(\delta(\delta^*(s_0, a), a), b) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta^*(s_0, \epsilon), a), a), b) \\ &= \delta(\delta(\delta(s_0, a), a), b) \\ &= \delta(\delta(s_1, a), b) \\ &= \delta(s_0, b) \\ &= s_0 \end{aligned}$$

Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

Definition 11.8 (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten \mathcal{A} **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

Definition 11.9 (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)

Die Menge

$$\text{RAT} := \{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen heißt Menge der **rationalen** Sprachen

Wir zeigen demnächst:

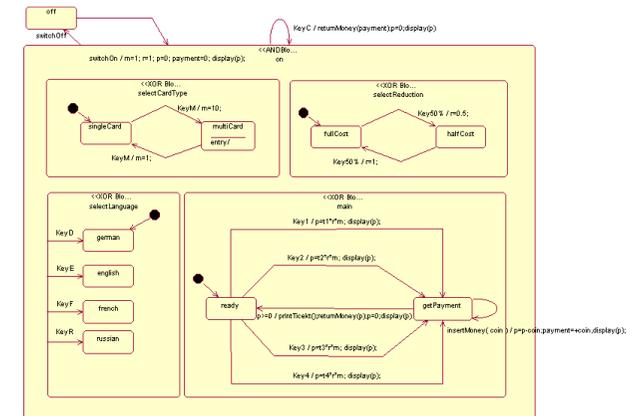
RAT = Menge der regulären Sprachen

Endliche Automaten: UML State Charts

UML State Charts

UML State Charts sind eine (erweiterte) Form endlicher Automaten

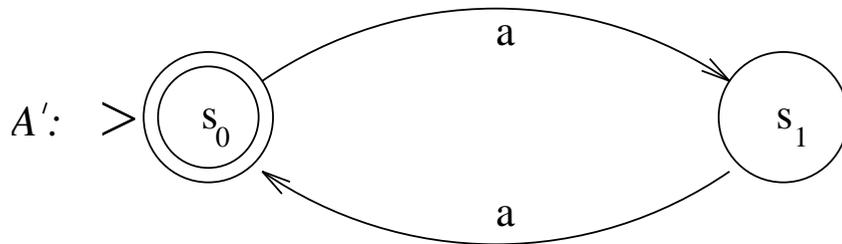
Beispiel 11.10



Endliche Automaten: Weitere Beispiele

Beispiel 11.11

Die Sprache aller Wörter mit gerader Anzahl von a über dem (kleineren) Alphabet $\Sigma = \{a\}$ wird akzeptiert von:



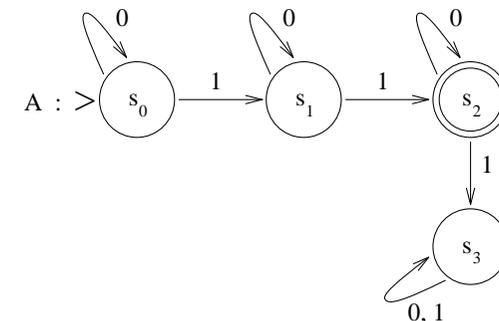
Endliche Automaten: Weitere Beispiele

Beispiel 11.12

Die Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält genau zwei Einsen}\}$$

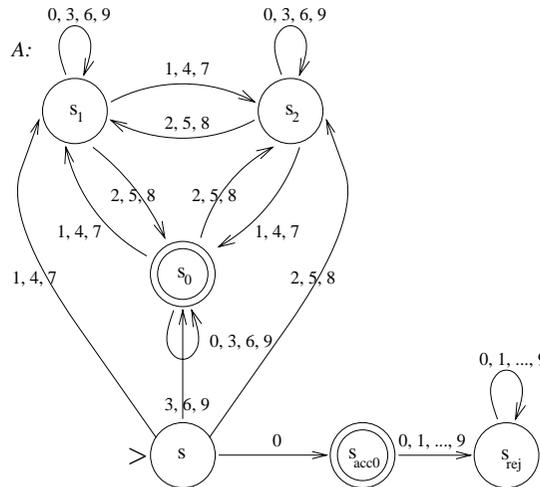
wird akzeptiert von dem folgenden endlichen Automaten:



Endliche Automaten: Weitere Beispiele

Beispiel 11.13

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen wird akzeptiert durch:



Teil III

Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 **Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)**
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endliche Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a **genau ein einziger** Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangsfunktion δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a evtl. **mehrere Nachfolgezustände** – oder **gar keiner**
- festgelegt durch Übergangsrelation Δ

Indeterminierter endlicher Automat

Definition 12.1 (Indeterminierter endlicher Automat)

Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

Indeterminierter endlicher Automat: Übergangsrelation

Definition 12.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \Delta^*((q, \varepsilon), q') & \text{ gdw } q' = q \\ \Delta^*((q, wa), q') & \text{ gdw } \exists q'' \in K (\Delta^*((q, w), q'') \wedge \Delta((q'', a), q')) \end{aligned}$$

NDEA: Beispiel

Beispiel 12.4

Der Automat

$$\mathcal{A} = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \Delta, \{S_0\}, \{S_0\})$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta(S_0, a) &= \{S_1\} \\ \Delta(S_1, b) &= \{S_0, S_2\} \\ \Delta(S_2, a) &= \{S_0\} \end{aligned}$$

akzeptiert die Sprache

$$L = \{ab, aba\}^*$$

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A} akzeptiert ein Wort w , wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der **Beschriftung** w durch \mathcal{A} gibt,
- der in einem **finalen** Zustand endet.

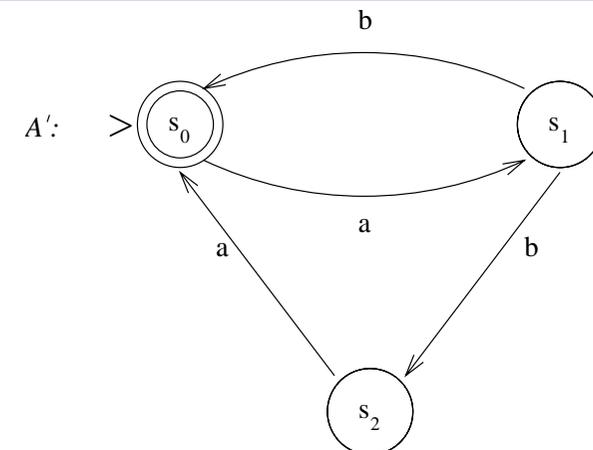
Definition 12.3 (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem indeterminierten endlichen Automaten \mathcal{A} **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*((s_0, w), q)\}$$

NDEA: Graphische Darstellung

Der indeterminierte Automat aus Beispiel 12.4



Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

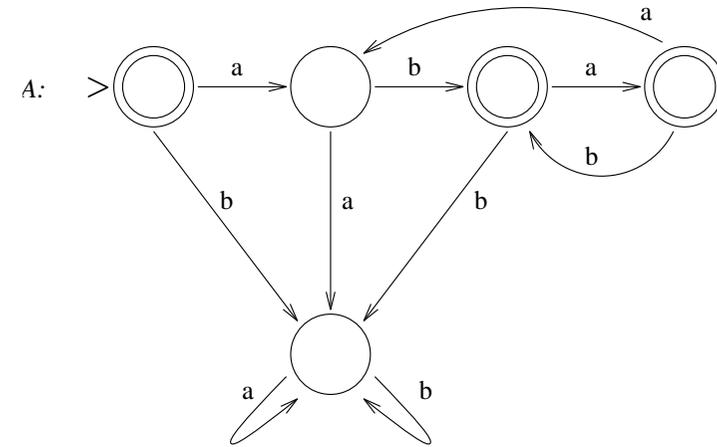
- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Zwei Sichtweisen auf indeterminierte Automaten

- Der Automat durchläuft **alle** Wege (**parallel** oder mittels **Backtracking**)
- Der Automat **rät**, welcher von mehreren möglichen Folgezuständen der richtige ist

NDEA und DEA: Beispiel

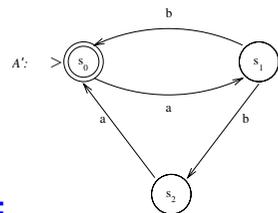
Beispiel 12.5 (DEA für gleiche Sprache wie NDEA aus Bsp. 12.4)



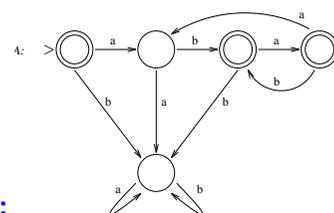
Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



NDEA:



DEA:

- DEA hat mehr Zustände, komplizierter
- DEA muss nicht „raten“
- DEA braucht genauso viele Schritte

NDEA und DEA

Wir zeigen später:

Für jeden indeterminierten Automaten A_{NDEA} gibt es einen determinierten Automaten A_{DEA} mit

$$L(A_{NDEA}) = L(A_{DEA})$$

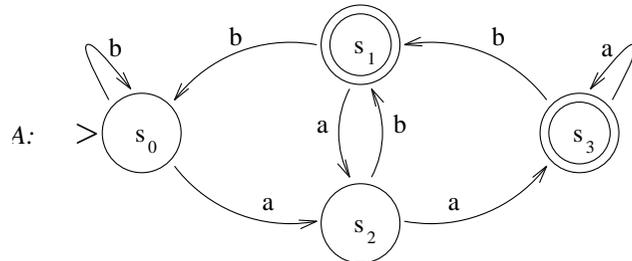
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Beispiel 12.6

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

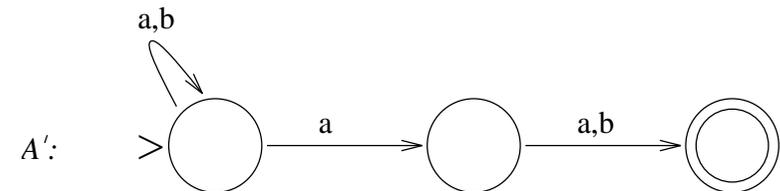
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Beispiel 12.7

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)



NDEA und DEA: Größenvergleich

Größenvergleich (Worst case)

Sprache über $\{a, b\}$ der Wörter, deren n -letzter Buchstabe ein a ist

Determinierter Automat: 2^n Zustände

(einen für jede Buchstabenkombination der Länge n)

Indeterminierter Automat: $n + 1$ Zustände

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem 12.8 (DEA gleich mächtig wie NDEA)

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis.

„ \Rightarrow “:

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

□

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

„ \Leftarrow “:

Sei

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat.
Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$.

Beweisidee:

Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ einen determinierten Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion . . .

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Fortsetzung . . .

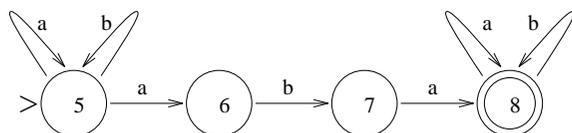
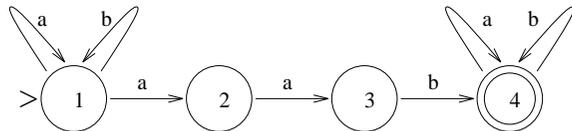
- Zustände in \mathcal{A}_{DEA} bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ mit w nach q_1, \dots, q_n gelangt, dann gelangt man in \mathcal{A}_{DEA} mit w nach $q' = \{q_1, \dots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von \mathcal{A}_{DEA} :
Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Finale Zustände von \mathcal{A}_{DEA} :
Jede Menge von Zustände, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ enthält

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:

Menge der alten Startzustände, also $\{1, 5\}$.

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 5, 6\}$ mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit b .

$$\Delta(1, b) = \{1\}$$

$$\Delta(5, b) = \{5\}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt \mathcal{A}_{DEA} also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 2, 5, 6\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(2, a) = \{3\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

$$\Delta(6, a) = \emptyset$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ mit

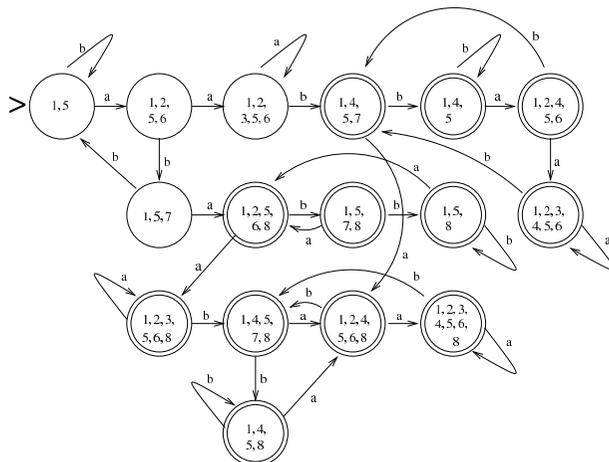
$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat \mathcal{A}_{DEA} :



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \rightarrow 2^K \quad \text{mit} \quad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automata

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subset K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
(alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automata

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Beweis durch Induktion über die Länge von w :

Induktionsanfang:

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Es ist

$$\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} & \delta'^*(M, wa) \\ &= \delta'(\delta'^*(M, w), a) && \text{Def. von } * \\ &= \bigcup_{p \in \delta'^*(M, w)} \Delta(p, a) && \text{Definition von } \delta' \\ &= \bigcup_{p \in (\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w))} \Delta(p, a) && \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\ &= \{q' \mid \exists q \in M \exists p \in \Delta^*(q, w) q' \in \Delta(p, a)\} \\ &= \{q' \mid \exists q \in M q' \in \Delta^*(q, wa)\} && \text{Def. von } * \\ &= \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) \end{aligned}$$

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$

gdw $\delta'^*(I', w) \in F'$ (Def. der Sprache eines Automaten)

gdw $\delta'^*(I, w) \in F'$ (da $I' = I$ per Def.)

gdw $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Def. von F')

gdw $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$ (nach Lemma)

gdw $\exists q \in I \exists q' \in F (q' \in \Delta^*(q, w))$

gdw $w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ (Def. der Sprache eines Automaten)

Damit: $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ □

Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten**
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Automaten mit ε -Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (Automat mit ε -Kanten): Kanten mit einem **Wort** beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automaten mit ε -Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε -Kanten: Definition

Definition 13.1 (Automat mit ε -Kanten)

Ein **Automat mit ε -Kanten (ε -NDEA)** \mathcal{A} ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε -Kanten: Übergangsrelation

Definition 13.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\begin{aligned} \Delta^*((q, \varepsilon), q') & \text{ gdw } q' = q \text{ oder } \Delta((q, \varepsilon), q') \\ \Delta^*((q, w_1 w_2), q') & \text{ gdw } \exists q'' \in K \\ & \quad \Delta^*((q, w_1), q'') \vee \Delta((q, w_1), q'') \\ & \quad \wedge \\ & \quad \Delta^*((q'', w_2), q') \vee \Delta((q'', w_2), q') \end{aligned}$$

Automaten mit ε -Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition 13.3 (Von ε -NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten mit ε -Kanten

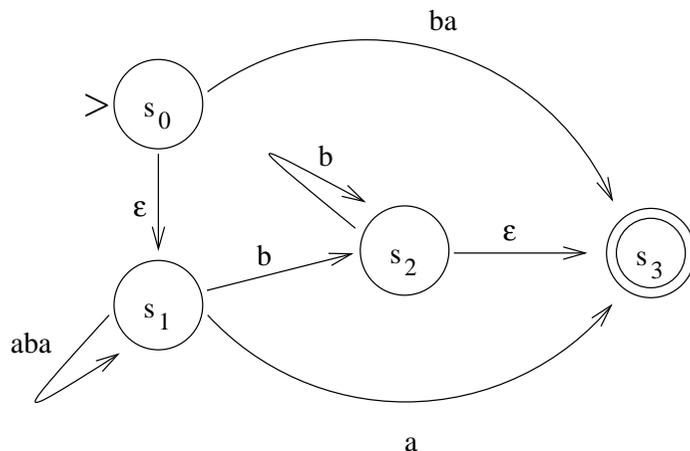
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*((s_0, w) q) \}$$

Automaten mit ε -Kanten: Beispiel

Beispiel 13.4 (Automaten mit ε -Kanten)



Akzeptiert: $\{aba\}^* \{b\} \{b\}^* + \{aba\}^* \{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε -Kanten und NDEAs

Theorem 13.5 (ε -NDEA gleich mächtig wie NDEA)

Zu jedem Automaten mit ε -Kanten \mathcal{A} existiert ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A}' mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Beweis.

Transformation von \mathcal{A} in einen NDEA ohne ε -Kanten

1 Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert \rightarrow beibehalten
- mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) \rightarrow ersetze durch n Übergänge (verwende $n - 1$ neue, zusätzlicher Zustände)
- ε -Übergänge \rightarrow statt diesen

$$\Delta((q, a), q'')$$

für jedes Paar

$$\Delta((q, a), q') \text{ und } \Delta((q', \varepsilon), q'')$$

□

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε -Kanten und NDEAs

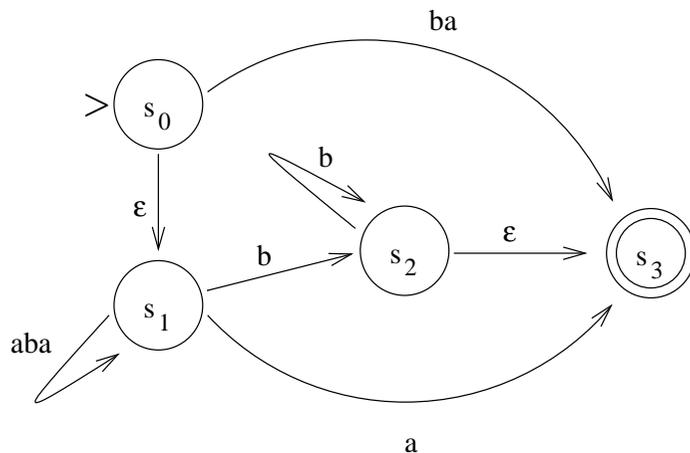
Beweis (Fortsetzugn)

Transformation von \mathcal{A} in einen NDEA ohne ε -Kanten

- 2 Zusätzliche Initialzustände:
Falls $q \in I$ und $\Delta^*((q, \varepsilon), q')$, dann auch $q' \in I$
- 3 Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

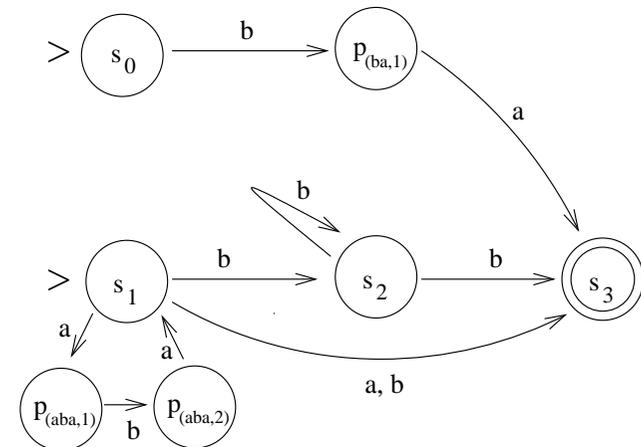
Beispiel 13.6 (Der Automat mit ε -Kanten ...)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel 13.7 (... wird transformiert in den äquivalenten NDEA)



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* + \{aba\}^*\{a\} + \{ba\}$

Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 **Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen**
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Satz von Kleene

Theorem 14.1 (Satz von Kleene: $RAT = L_3$)

Eine Sprache L ist rational gdw L ist regulär.

Merke:

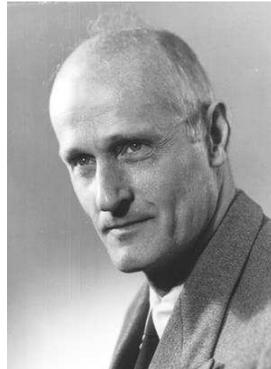
L ist rational heißt: es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

L ist regulär heißt: es gibt eine rechtslineare Grammatik für L

Satz von Kleene

Stephen Cole Kleene ★ 1909, † 1994

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
Erfinder der Regulären Ausdrücke



Satz von Kleene

Beweis

„ \Rightarrow “ zu zeigen:

Wenn eine Sprache L von einem endlichen Automaten \mathcal{A} akzeptiert wird, ist sie regulär (wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert).

Sei also $L = L(\mathcal{A})$ für einen endlichen Automaten

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

Dazu konstruieren wir eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$:

Automat \mathcal{A} : in Zustand q , liest a , geht in Zustand q'
Grammatik: Endvariable q , erzeugt a neue Endvariable q'

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Formale Definition der Grammatik:

$$V := K$$

$$T := \Sigma$$

$$S := s_0$$

$$R := \{ q \rightarrow aq' \mid \delta(q, a) = q' \} \cup \{ q \rightarrow \varepsilon \mid q \in F \}$$

Durch Induktion über die Länge eines Wortes w :

$$S \xRightarrow*_G wq \quad \underline{\text{gdw}} \quad \delta^*(s_0, w) = q$$

$$\text{Daraus: } S \xRightarrow*_G w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q \in F (S \xRightarrow*_G wq \Rightarrow w) \\ \underline{\text{gdw}} \quad \exists q \in F (\delta^*(s_0, w) = q) \\ \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

„ \Leftarrow “ zu zeigen:

Wenn eine Sprache L regulär ist (sie wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert), dann gibt es einen endlichen Automaten \mathcal{A} der sie akzeptiert.

Sei also $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik

$$G = (V, T, R, S)$$

Dazu konstruieren wir einen ε -NDEA $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit:

$$K := V \cup \{q_{stop}\} \quad (q_{stop} \text{ neu})$$

$$I := \{S\}$$

$$\Sigma := T$$

$$F := \{q_{stop}\}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Definition von Δ :

$$\Delta((X, u), X') := \Leftrightarrow_{\text{def}} X \rightarrow uX' \in R$$

$$\Delta((X, u), q_{stop}) := \Leftrightarrow_{\text{def}} X \rightarrow u \in R$$

für $X, X' \in K$ und $u \in \Sigma^*$

Durch Induktion über die Länge einer Ableitung:

$$S \xRightarrow*_G w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Delta^*((S, w), q_{stop}) \quad \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Wegen Gleichmächtigkeit von ε -NDEA- mit DEA-Automaten gibt es dann auch einen determinierten endlichen Automaten, der L akzeptiert. □

Satz von Kleene

Beispiel 14.2

ε -NDEA:

Grammatik G mit Regeln

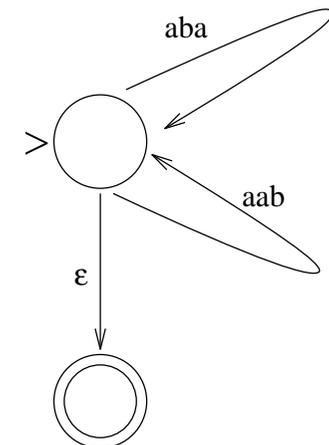
$$S \rightarrow abaS$$

$$S \rightarrow aabS$$

$$S \rightarrow \varepsilon$$

Sprache

$$L(G) = \{aba, aab\}^*$$



Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 **Pumping-Lemma**
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Pumping-Lemma

„Aufpumpbarkeit“ (informell)

Lange Wörter $x \in L$ lassen sich zerlegen

$$x = uvw \quad |v| \geq 1$$

so dass

$$u \underbrace{vv \dots v}_i w = uv^m w$$

wieder in L liegt (für alle $m \geq 1$)

Pumping-Lemma

Pumping Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass alle Wörter

$$w \in L \quad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Anwendung

- Wichtige Information über die Struktur regulärer Sprachen
- Nachweis der Nicht-Regularität von Sprachen:
Wenn das Pumping-Lemma für eine Sprache nicht gilt, dann kann sie nicht regulär sein

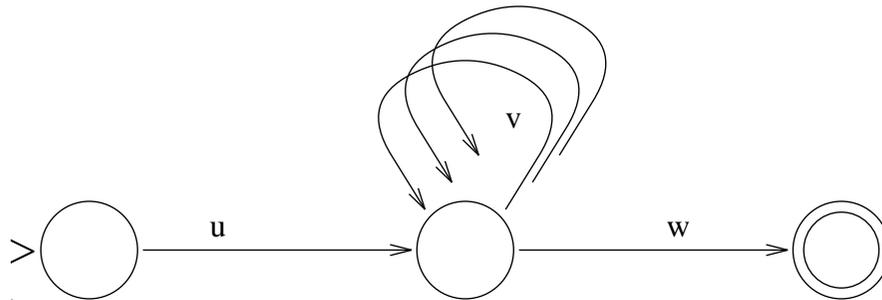
Pumping-Lemma: Intuition

Warum gilt das Pumping-Lemma?

- Zu regulärer Sprache L gibt es einen DEA, der L akzeptiert
- Dieser hat endliche Zustandsmenge K .
Sei $m := |K|$.
- Wenn $|w| > |K|$, dann muss beim Akzeptieren von w eine Schleife durchlaufen werden.
- Die Schleife kann auf mehrfach durchlaufen werden.
- Das Teilwort v , das der Schleife entspricht kann aufgepumpt werden.

Pumping-Lemma: Intuition

Abstrakt gesehen



Pumping-Lemma: Formal

Theorem 15.1 (Pumping-Lemma für L_3 -Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$.

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \text{ mit } |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis

Sei L eine reguläre Sprache.

1. Fall: L ist endlich.

Sei w_{max} das längste Wort in L .

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter $x \in L$, für die $|x| \geq n$ gilt.

Also gilt dann Pumping-Lemma trivialerweise.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

2. Fall: L ist unendlich.

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der L akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x = x_1 x_2 \dots x_t \in L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

Zu zeigen: x lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \dots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von x durchlaufen werden:

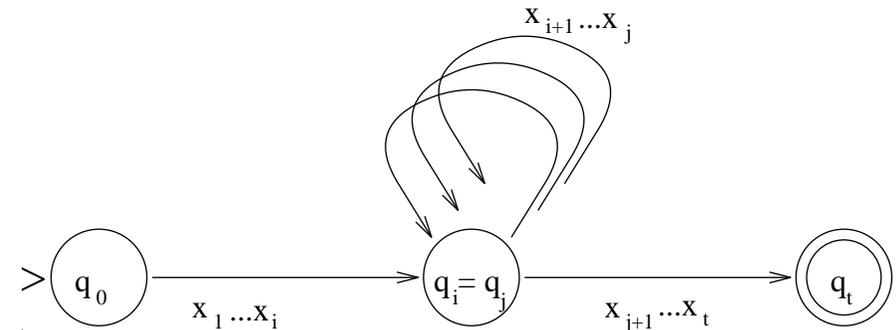
$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq t-1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da $t \geq |K| + 1$, muss es $0 \leq i < j \leq t-1$ geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$



Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left. \begin{array}{l} u := x_1 \dots x_i \\ v := x_{i+1} \dots x_j \\ w := x_{j+1} \dots x_t \end{array} \right\} \quad x = uvw \quad \text{mit} \quad 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle $m \geq 0$ gibt es Wege

$$q_0, \dots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \dots, q_j = q_i, \dots, q_j = \dots = q_i, \dots, q_j}_{m \text{ mal}}, q_{j+1}, \dots, q_t$$

- Also: $uv^m w$ wird von \mathcal{A} akzeptiert.
- Also: $uv^m w \in L$ □

Pumping-Lemma: Umkehrung

Korollar

Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt, dann ist sie **nicht** regulär.

Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.
- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt, folgt **nicht**, dass sie regulär ist.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beispiel 15.2

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

- 1 $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- 2 $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1

Zu

$$L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Annahme: L_1 ist regulär.

Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort

$$a^n b a^n \in L_1$$

aufpumpen lassen (da $|a^n b a^n| \geq n$).

Sei $a^n b a^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

- 1. Fall:** $u = a^k, v = a^j, w = a^i b a^n$ mit $i, k \geq 0, j > 0$ und $k + j + i = n$.
Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i b a^n = a^{k+2j+i} b a^n = a^{n+j} b a^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

- 2. Fall:** $u = a^n b a^i, v = a^j, w = a^k$

Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

- 3. Fall:** $u = a^k, v = a^j b a^i, w = a^l$ mit $k + j + i + l = n$ und $i, j, k, l \geq 0$
Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^j b a^i a^j b a^i a^l = a^{k+j} b a^{i+j} b a^{i+l} \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

Also: Annahme falsch.

Also: L_1 nicht regulär. □

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2

Zu

$$L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

Annahme: L_2 ist regulär.

Dann gilt für L_2 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich jedes Wort

$$a^p \in L_2 \quad \text{mit} \quad p \geq n$$

aufpumpen lassen.

Sei $a^p = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Sei

$$a^p = uvw = a^i a^j a^k$$

also

$$i + j + k = p \geq n \quad \text{und} \quad 0 < j < n$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 1: $i + k > 1$.

Pumpe $(i + k)$ mal:

$$uv^{i+k}w = a^i a^{j(i+k)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2 , d. h.

$$i + j(i + k) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch:**

$$\begin{aligned} i + j(i + k) + k &= i + ij + jk + k \\ &= i(1 + j) + (j + 1)k \\ &= i(1 + j) + k(1 + j) \\ &= (i + k)(1 + j) \end{aligned}$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 2: $i + k = 1$.

Pumpe $(j + 2)$ mal:

$$uv^{j+2}w = a^i a^{j(j+2)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2 , d. h.

$$i + j(j + 2) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch!:**

$$\begin{aligned} i + j(j + 2) + k &= 1 + j(j + 2) \\ &= 1 + 2j + j^2 \\ &= (1 + j)^2 \end{aligned}$$

Also: Annahme falsch. L_2 nicht regulär. □

Pumping-Lemma: Stärkere Variante

Theorem 15.3 (Pumping-Lemma für L_3 -Sprachen, stärkere Variante)

Sei $L \in \text{RAT}$.

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \text{ mit } |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n$ (statt $|v| < n$)
- $uv^m w \in L$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Teil III

Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme**
- 7 Rational = Reguläre Ausdrücke

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel 15.4 (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^{-1} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

Abschlusseigenschaften

Lemma 16.1

Seien zwei reguläre Sprachen L, L' gegeben.

Dann kann folgende endlichen Automaten konstruieren:

- \mathcal{A}_{\neg} akzeptiert $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$
- \mathcal{A}_{\cup} akzeptiert $L \cup L'$
- \mathcal{A}_{\circ} akzeptiert $L \circ L'$
- \mathcal{A}_{*} akzeptiert L^*
- \mathcal{A}_{\cap} akzeptiert $L \cap L'$

Beweis.

An Tafel. □

Abschlusseigenschaften

Theorem 16.2 (Abschlusseigenschaften von L_3)

Wenn L, L' reguläre Sprachen sind, dann sind auch

- \bar{L}
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren. Also sind sie regulär. \square

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei \mathcal{A} ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

- 1 leer ist.
- 2 unendlich ist.

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

- 1 leer ist.
- 2 unendlich ist.

Wortprobleme

Beweis.

Zu (i): $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu (ii): $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen. \square

Wortprobleme

Lemma 16.4

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Korollar

Für rechtslineare Grammatiken G_1, G_2, G_3 und endliche Automaten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ ist entscheidbar, ob:

$$L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$$

$$L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_3)$$

usw.

Beweis

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Man kann zu \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) = (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \text{gdw} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Hauptsatz von Kleene

Theorem 17.1 (Hauptsatz von Kleene)

Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Endliche Automaten

- 1 Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- 2 Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- 3 Automaten mit epsilon-Kanten
- 4 Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- 5 Pumping-Lemma
- 6 Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- 7 **Rational = Reguläre Ausdrücke**

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„ \Rightarrow “ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA \mathcal{A} .

Zustände von \mathcal{A} seien q_1, \dots, q_n .

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von \mathcal{A}

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R_{i,j}^k := \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \dots, q_k\}\}$$

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(A) = \bigcup_{q_f \in F} R_{1,f}^n$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R_{1,f}^n$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R_{1,j}^k$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Beweis

„ \Leftarrow “ (einfacherer Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivalenten ε -NDEA

(an der Tafel)