Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Grundzertifikat 2003 audit familiengerechte hochschule der berufundfamilie gGmbH

Einführung in die Theoretische Informatik I/ Grundlagen der Theoretischen Informatik Sommersemester 2007 6. Aufgabenblatt

Ausgabe: 21. 05. 2007 Besprechung: 05./06. 06. 2007

---

1 Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lösung:

1. Annahme: L_1 sei doch regulär. Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Wir untersuchen $x = a^n c a^n$. Sei $uvw = x$ eine Zerlegung. Wir unterscheiden folgende Fälle:

   Fall 1: $v \in \Im(a^+) \wedge w \in \Im(a^*)$ (also liegt v „in den hinteren a's")
   Dann gilt: $uv^2w = a^n c a^{n+|v|}$. Wegen $|v| \geq 1$ folgt daraus: $uv^2w \notin L_1$

   Fall 2: $v \in \Im(a^+) \wedge w \in \Im(a^* c a^*)$ (also liegt v „in den vorderen a's")
   Dieser Fall ist analog zu Fall 1.

   Fall 3: $v \in \Im(a^* c a^*)$
   Dann gilt: $uv^2w \in \Im(a^* c a^* c a^*)$. Es folgt: $uv^2w \notin L_1$

   Damit ist L_1 nicht regulär. □

2. Annahme: L_2 sei doch regulär. Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Wir untersuchen $x = a^n b^n a^{2n}$. Sei $uvw = x$ eine Zerlegung. Wir unterscheiden folgende Fälle:

   Fall 1: $v \in \Im(a^+) \wedge w \in \Im(a^*)$ (also liegt v „in den hinteren a's")
   Dann gilt: $uv^2w = a^n b^n a^{2n+|v|}$. Wegen $|v| \geq 1$ folgt daraus: $uv^2w \notin L_2$

   Fall 2: $v \in \Im(b^+)$
   Dieser Fall ist analog zu Fall 1.

   Fall 3: $v \in \Im(a^+) \wedge u \in \Im(a^*)$ (also liegt v „in den vorderen a's")
   Dieser Fall ist analog zu Fall 1.

   Fall 4: $v \in \Im(b^+ a^+)$
   Dann gilt: $uv^2w \in \Im(a^* b^+ a^+ b^+ a^+)$. Es folgt: $uv^2w \notin L_2$

   Fall 5: $v \in \Im(a^+ b^+)$
   Dann gilt: $uv^2w \in \Im(a^+ b^+ a^+ b^+ a^*)$. Es folgt: $uv^2w \notin L_2$

   Damit ist L_2 nicht regulär. □

3. Annahme: L_3 sei doch regulär.[1] Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Wir untersuchen $x = a^{2^n}$. Sei $uvw = x$ eine Zerlegung. Dann gibt es $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ mit $u = a^i, v = a^j$ und $w = a^k$, und es gilt $1 \leq j < n < 2^n$. Wegen $j < 2^n = i + j + k$ gilt $i + k \neq 0$. Damit hat uv^2w die Länge $i + 2j + k$, und es gilt:

$$2^n = i + j + k < i + 2j + k < 2i + 2j + 2k = 2(i + j + k) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Zusammengefasst: $2^n < |uv^2w| < 2^{n+1}$, folglich $uv^2w \notin L_3$. Damit ist L_3 nicht regulär. $\square$

2 Reguläre Ausdrücke und endliche Automaten 1

Lösung:

3 Reguläre Ausdrücke und endliche Automaten 2

Lösung:

$$\begin{aligned}
&R^0_{1,1} = \{\varepsilon, a\} \qquad R^0_{1,2} = \{b\} \qquad R^0_{2,1} = \emptyset \qquad R^0_{2,2} = \{\varepsilon\} \\
&R^1_{1,1} = R^0_{1,1} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} = \{\varepsilon, a\} \cup \{\varepsilon, a\}\{\varepsilon, a\}^*\{\varepsilon, a\} = \{\varepsilon, a\}^+ = \{a\}^* \\
&R^1_{1,2} = R^0_{1,2} \cup R^0_{1,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} = \{b\} \cup \{\varepsilon, a\}\{\varepsilon, a\}^*\{b\} = \{\varepsilon, a\}^*\{b\} = \{a\}^*\{b\} \\
&R^1_{2,1} = R^0_{2,1} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,1} = \emptyset \cup \emptyset\{\varepsilon, a\}^*\{\varepsilon, a\} = \emptyset \\
&R^1_{2,2} = R^0_{2,2} \cup R^0_{2,1}(R^0_{1,1})^* R^0_{1,2} = \{\varepsilon\} \cup \emptyset\{\varepsilon, a\}^*\{b\} = \{\varepsilon\} \\
&R^2_{1,2} = R^1_{1,2} \cup R^1_{1,2}(R^1_{2,2})^* R^1_{2,2} = \{a\}^*\{b\} \cup \{a\}^*\{b\}\{\varepsilon\}^*\{\varepsilon\} = \{a\}^*\{b\}
\end{aligned}$$

Damit: $L(A) = R^2_{1,2} = \{a\}^*\{b\} = \Im(a^*b)$

[1] Ich danke Martin Ramberger für die Beweisidee.