UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Einführung in die Theoretische Informatik I/ Grundlagen der Theoretischen Informatik

SS 2007

Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

3. Teilklausur

25. 07. 2007

Persönliche Daten — bitte gut leserlich ausfüllen!

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikelnummer: ....

Klausurergebnis — bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1: .... (12 Punkte)

Aufgabe 2: .... (5 Punkte)

Aufgabe 3: .... (2 Punkte)

Aufgabe 4: .... (6 Punkte)

Aufgabe 5: .... (5 Punkte)

Gesamtergebnis: ....

Note: ....

1 Multiple Choice (3+3+4+2 = 12 Punkte)

Hinweis:
Bei den folgenden Ankreuzaufgaben führen falsche Kreuze zu Punktabzug!
Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für die jeweilige Teilaufgabe vergeben.

(a) Sprachen und Grammatiken (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Zu jeder *mehrdeutigen* kontextfreien Grammatik gibt es eine äquivalente *eindeutige* kontextfreie Grammatik.	richtig ☐ falsch ☒
Das Komplement jeder kontextfreien Sprache ist kontextfrei.	richtig ☐ falsch ☒
Wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind, dann ist auch $L_1 L_2$ kontextfrei.	richtig ☒ falsch ☐

(b) Turing-Maschinen (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Zu jeder Sprache L, die von einem PDA akzeptiert wird, gibt es eine NTM, die L akzeptiert.	richtig ☒ falsch ☐
Zu jeder Sprache L, die von einer DTM akzeptiert wird, gibt es einen PDA, der L akzeptiert.	richtig ☐ falsch ☒
Eine universelle Turing-Maschine kann sich selbst simulieren.	richtig ☒ falsch ☐

(c) Entscheidbarkeit (4 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Jede akzeptierbare Sprache ist entscheidbar.	☐	☒
Jede entscheidbare Sprache ist rekursiv aufzählbar.	☒	☐
Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.	☒	☐
Jede unendliche Sprache ist unentscheidbar.	☐	☒

(d) Komplexität (2 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Es ist bekannt und einfach zu beweisen, dass $\mathbf{PSPACE} \neq \mathbf{NP}$.	☐	☒
Es ist bekannt und einfach zu beweisen, dass $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.	☒	☐

2 CYK-Algorithmus (5 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgenden Regeln in R:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AD \mid a \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CA \mid a \\
D &\rightarrow SE \\
E &\rightarrow BC
\end{aligned}
$$

Hinweis: G ist bereits in Chomsky-Normalform.

Parsen Sie das Wort *aaba* mit dem CYK-Algorithmus. Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle.

	a	a	b	a
a	S, A, C	$\times$	$\times$	$\times$
a	C	S, A, C	$\times$	$\times$
b	$-$	$-$	B	$\times$
a	S	D	E	S, A, C

3 Pushdown-Automaten (2 Punkte)

Gegeben sei der Pushdown-Automat (Kellerautomat)

$$A = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \Delta, s_0, Z_0, \emptyset)$$

mit folgender Übergangsrelation:

$$\begin{array}{rcll} \Delta & = & \{ & ((s_0, a, Z_0), \quad (s_0, XZ_0)), \\ & & & ((s_0, a, X), \quad (s_0, XX)), \\ & & & ((s_0, b, Z_0), \quad (s_1, \varepsilon)), \\ & & & ((s_0, b, X), \quad (s_1, \varepsilon)), \\ & & & ((s_1, b, Z_0), \quad (s_1, \varepsilon)), \\ & & & ((s_1, b, X), \quad (s_1, \varepsilon)) \qquad \} \end{array}$$

Welche der folgenden Sprachen erkennt der Automat *per leerem Keller*?

Kreuzen Sie die zutreffende Sprache an. (Nur eine Antwort ist richtig!)

$\{a^{n+1}b^n \mid n \geq 0\}$	☐
$\{a^n b^{n+1} \mid n \geq 0\}$	☒
$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$	☐
$\{a^k b^n \mid k, n \geq 0 \wedge k \leq n\}$	☐

Lösung:
In den akzeptierten Wörtern kommt ein b mehr vor, weil das von Anfang an auf dem Stack liegende Z_0 beim Abbau des Stacks auch noch entfernt werden muss (es wird nicht gesondert behandelt).

4 Turing-Maschinen (3+3 = 6 Punkte)

Gegeben sei die determinierte Turing-Maschine $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \{0, 1, \#\}, \delta, s_0)$ deren Übergangsfunktion durch folgende Tabelle definiert ist (alle nicht aufgeführten Übergänge seien undefiniert):

δ	0	1	#
s_0			(s_1, L)
s_1	$(s_3, 1)$	$(s_2, 0)$	(s_3, R)
s_2	(s_1, L)		
s_3	(s_3, R)	(s_3, R)	$(h, \#)$

M berechnet die Funktion

$$s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad \text{mit} \qquad s(n) = (n + 1) \bmod 16 \ ,$$

wobei Ein- und Ausgabe mit genau 4 Ziffern binär dargestellt sind.

(a) Geben Sie die Rechnung von M für die Eingabe 0101 an. Vervollständigen Sie dazu folgende Auflistung der Konfigurationen:

0.: s_0, $\#0101\underline{\#}$
1.: s_1, $\#010\underline{1}\#$
2.: s_2, $\#010\underline{0}\#$
3.: s_1, $\#01\underline{0}0\#$
4.: s_3, $\#01\underline{1}0\#$
5.: s_3, $\#011\underline{0}\#$
6.: s_3, $\#0110\underline{\#}$
7.: h, $\#0110\underline{\#}$

(b) Ändern Sie M so ab, dass die entstehende DTM die Funktion

$$t : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad \text{mit} \qquad t(n) = (n + 2) \bmod 16$$

berechnet.

Vervollständigen Sie dazu folgende Tabelle:

δ	0	1	#
s_0			(s_4, L)
s_1	$(s_3, 1)$	$(s_2, 0)$	(s_3, R)
s_2	(s_1, L)		
s_3	(s_3, R)	(s_3, R)	$(h, \#)$
s_4	(s_1, L)	(s_1, L)	

Lösung:
Mit Hilfe eines zusätzlichen Zustands s_4 macht man am Anfang einen zusätzlichen Schritt nach links.
Alternativ könnte man auch eine Maschine bauen, die die ursprüngliche Maschine M zweimal ausführt.

5 Entscheidbarkeit (1+2+2 = 5 Punkte)

Sei $\mathcal{TM}$ die Menge aller Turing-Maschinen, und sei

$$g : \mathcal{TM} \to \mathbb{N}_0$$

eine bijektive Gödelisierungsfunktion für $\mathcal{TM}$ (also eine bijektive, berechenbare Abbildung zwischen $\mathcal{TM}$ und $\mathbb{N}_0$).
Ferner sei die Sprache L definiert durch:

$$L = \{n \mid \text{die Turing-Maschine } M \in \mathcal{TM}\text{, für die } g(M) = n \text{ gilt, hält bei Eingabe } n\}$$

(a) Ist die Sprache L entscheidbar?

Lösung:
Nein.
Denn dies ist das spezielle Halteproblem, das bekanntermaßen unentscheidbar ist.

(b) Ist L aufzählbar (und also akzeptierbar)?
Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort (1–2 Sätze).

Lösung:
Ja.
Man kann alle Turing-Maschinen simultan mittels einer universellen TM ausführen und dann jeweils, wenn eine der Maschinen terminiert, in den Blinkzustand gehen und diese ausgeben.

(c) Ist das Komplement $\overline{L}$ von L akzeptierbar?
Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort (1–2 Sätze).

Lösung:
Nein.
Wäre das Komplement $\overline{L}$ von L akzeptierbar und also aufzählbar, dann wäre sowohl L (siehe (b)) als auch $\overline{L}$ aufzählbar. Dann müsste L entscheidbar sein (Satz aus der Vorlesung), was im Widerspruch zu (a) stünde.