Vorlesung

Theoretische Informatik II

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Wintersemester 2007/2008

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren zum Teil auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Christoph Kreitz (gehalten an der Universität Potsdam)

Ihnen gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, Oktober 2007

Teil III

Rekursive Funktionen

Rekursive Funktionen

Motivation

- Funktionen als Berechnungsmodell
- Ohne darunterliegendes Maschinenmodell

Idee

- Einfache (atomare) Funktionen sind berechenbar
- Kombinationen berechenbarer Funktionen sind berechenbar
- Wir betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ($k \geq 0$)

Fragen

- Welches sind die atomaren Funktionen?
- Welche Art der Kombination ist zulässig?

Rekursive Funktionen

Atomare Funktionen

Folgende Funktionen sind **primitiv rekursiv** und **μ-rekursiv**:

Konstante Null

$$0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 0() = 0$$

Nachfolger (Successor)

$$+1 : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad +1(n) = n+1$$

Projektion (Auswahl)

$$\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \pi_i^k(n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_k) = n_i \qquad (1 \le i \le k)$$

Rekursive Funktionen

Schreibweise bei Argumententupeln

$$\boldsymbol{n} \quad \text{für} \quad n_1, \ldots, n_k \qquad (k \ge 0)$$

Rekursive Funktionen

Komposition (simultanes Einsetzen)

Sind

$$g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N} \qquad (r \ge 1)$$

$$h_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, \ \ldots, \ h_r : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \qquad (k \ge 0)$$

primitiv rekursiv bzw. **μ-rekursiv**,
dann ist auch

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f(\boldsymbol{n}) = g(h_1(\boldsymbol{n}), \ldots, h_r(\boldsymbol{n}))$$

primitiv rekursiv bzw. **μ-rekursiv**

Schreibweise ohne Argumente:

$$f = g \circ (h_1, \ldots, h_r)$$

Teil III

Rekursive Funktionen

Primitiv rekursive Funktionen

Primitive Rekursion

Sind

$$g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \qquad (k \geq 0)$$
$$h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$$

primitiv rekursiv,
dann ist auch

$$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} f(\boldsymbol{n},0) &= g(\boldsymbol{n}) \\ f(\boldsymbol{n},m+1) &= h(\boldsymbol{n},m,f(\boldsymbol{n},m)) \end{aligned}$$

primitiv rekursiv

Schreibweise ohne Argumente:

$$f = \mathcal{PR}[g,h]$$

Primitiv rekursive Funktionen

Definition 10.1 (Primitiv rekursive Funktionen)

Atomare Funktionen: Die konstanten Funktionen
- Null 0
- Nachfolger $+1$
- Projektion π_i^k $(1 \leq i \leq k)$

sind primitiv rekursiv

Komposition: Die durch Komposition aus primitiv rekursiven Funktionen gebildeten Funktionen sind primitiv rekursiv

Primitive Rekursion: Die durch primitive Rekursion aus primitiv rekursiven Funktionen gebildeten Funktionen sind primitiv rekursiv

Notation

$\wp$ = Menge der primitiv rekursiven Funktionen

Definition arithmetischer Funktionen

$f(n) = n + c$ für $c \in \mathbb{N}$, $c > 0$

$$f = \underbrace{+1 \circ \cdots \circ +1}_{c \text{ mal}}$$

Identität

$$f = \pi_1^1$$

$f(n,m) = n + m$

$$f = \mathcal{PR}[\,\pi_1^1,\ +1 \circ \pi_3^3\,]$$

Definition arithmetischer Funktionen

$f(n) = n - 1$

$$f = \mathcal{PR}[\,0,\ \pi_1^2\,]$$

$f(n,m) = n - m$

$$f = \mathcal{PR}[\,\pi_1^1,\ -1 \circ \pi_3^3\,]$$

$f(n,m) = n * m$

$$f = \mathcal{PR}[\,0,\ + \circ (\pi_1^3, \pi_3^3)\,]$$