

Fakultät mit dem Fixpunkt-Kombinator Y

Dies ist die Definition der Fakultät, die in der Vorlesung Theoretische Informatik II am 08. 01. 2008 vorgestellt wurde, zusammen mit dem Beweis, dass der angegebene λ -Term das Gewünschte leistet.

Die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl n kann folgendermaßen definiert werden:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier wird die Rekursion dadurch ausgedrückt, dass der Operator $!$ auf beiden Seiten der Gleichung verwendet wird. Bei der Darstellung im λ -Kalkül ist das nicht möglich. Stattdessen wird der Fixpunkt-Kombinator Y verwendet, für den gilt:

$$Y\ f \equiv f\ (Y\ f) \tag{1}$$

Damit kann die Fakultät folgendermaßen definiert werden:¹

$$fac =_{def} Y\ (\lambda f.\lambda n.\textit{if iszero } n \textit{ then } \bar{1} \textit{ else } n * (f\ (pred\ n)))$$

Hier bezeichnet $\bar{n}$ den λ -Term, der eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ repräsentiert. $pred : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist die Vorgängerfunktion:

$$pred(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

¹Siehe “Boy Scout Haskell programmer” auf “The Evolution of a Haskell Programmer”, <http://www.willamette.edu/~fruehr/haskell/evolution.html> (verlinkt auf <http://www.uni-koblenz.de/~koch/lehre.html>).

Satz 1 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\text{fac } \bar{n} \rightarrow_{\beta}^* \overline{n!}$

Beweis: Per vollständiger Induktion über n .

Induktionsanfang: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\text{fac } \bar{0} &= Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \bar{0} \\
&\stackrel{(1)}{=} (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \\
&\quad \left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) \bar{0} \\
&\rightarrow_{\beta} \left(\lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * \right. \\
&\quad \left. \left(\left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) (\text{pred } n) \right) \right) \bar{0} \\
&\rightarrow_{\beta} \text{if iszero } \bar{0} \text{ then } \bar{1} \text{ else } \bar{0} * \\
&\quad \left(\left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) (\text{pred } \bar{0}) \right) \\
&\rightarrow_{\beta}^* \bar{1} \\
&= \bar{0!}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
\text{fac } \overline{n+1} &= Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \overline{n+1} \\
&\stackrel{(1)}{=} (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \\
&\quad \left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) \overline{n+1} \\
&\rightarrow_{\beta} \left(\lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * \right. \\
&\quad \left. \left(\left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) (\text{pred } n) \right) \right) \overline{n+1} \\
&\rightarrow_{\beta} \text{if iszero } \overline{n+1} \text{ then } \bar{1} \text{ else } \overline{n+1} * \\
&\quad \left(\left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) (\text{pred } \overline{n+1}) \right) \\
&\rightarrow_{\beta}^* \overline{n+1} * \left(\left(Y (\lambda f . \lambda n . \text{if iszero } n \text{ then } \bar{1} \text{ else } n * (f (\text{pred } n))) \right) \bar{n} \right) \\
&= \overline{n+1} * (\text{fac } \bar{n}) \\
&\stackrel{(IV)}{\rightarrow_{\beta}^*} \overline{n+1} * \overline{n!} \\
&\rightarrow_{\beta}^* \overline{(n+1) \cdot n!} \\
&= \overline{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Die vorletzte (mehrmalige) β -Reduktion ist wegen der Induktionsvoraussetzung möglich. $\square$