Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Theoretische Informatik II
Wintersemester 2007/2008
3. Aufgabenblatt

Ausgabe: 14. 11. 2007 Besprechung: 21. 11. 2007

1 Primitiv rekursive Funktionen 1

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

1. $\mathrm{fac} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{fac}(n) = n!$
2. $\mathrm{odd} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{odd}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dabei dürfen Sie die Multiplikation als primitiv rekursiv voraussetzen.

Lösung:

1. Mit dem primitiven Rekursionsschema:

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{fac}(0) & = & 1 & = & (+1)(0()) \\ \mathrm{fac}(m+1) & = & (m+1)\cdot \mathrm{fac}(m) & = & (+1)(\pi_1^2(m, \mathrm{fac}(m))) \cdot \pi_2^2(m, \mathrm{fac}(m)) \end{array}$$

   Damit: $\mathrm{fac} = \mathcal{PR}[(+1)\circ 0, * \circ (((+1)\circ \pi_1^2), \pi_2^2)]$

2. Mit dem primitiven Rekursionsschema:

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{odd}(0) & = & 0 & = & 0() \\ \mathrm{odd}(m+1) & = & 1 \dot{-} \mathrm{odd}(m) & = & c_1^2(m, \mathrm{odd}(m)) \dot{-} \pi_2^2(m, \mathrm{odd}(m)) \end{array}$$

   Damit: $\mathrm{odd} = \mathcal{PR}[0, \dot{-} \circ (c_1^2, \pi_2^2)]$

   Dabei können $\dot{-}: \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ und $\dot{-}\, 1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{array}{lclcl} n \dot{-} 0 & = & n & = & \pi_1^1(n) \\ n \dot{-} (m+1) & = & n \dot{-} m \dot{-} 1 & = & \pi_3^3(n, m, n \dot{-} m) \dot{-} 1 \\ & & & & \\ 0 \dot{-} 1 & = & 0 & = & 0() \\ m+1 \dot{-} 1 & = & m & = & \pi_1^2(m, m \dot{-} 1) \end{array}$$

   Damit: $\dot{-} = \mathcal{PR}[\pi_1^1, (\dot{-}\, 1)\circ \pi_3^3]$ und $\dot{-}\, 1 = \mathcal{PR}[0, \pi_1^2]$ (s. Vorlesung vom 13. 11. 2007).

   c_s^k: siehe Lösung von Aufgabe 2.

2 Primitiv rekursive Funktionen 2

Was berechnen die folgenden Funktionen?

1. $f = + \circ (* \circ (c^2_{20}, \pi^2_1), \pi^2_2)$
2. $g = \mathcal{PR}[c^1_1, * \circ (\pi^3_1, \pi^3_3)] \circ ((\dot{-}\ 1) \circ \pi^2_1, \pi^2_2)$

Dabei sei für alle $s, k \in \mathbb{N}_0$ und $\vec{n} \in \mathbb{N}_0^k$ definiert: $c^k_s(\vec{n}) = s$
$\circ$ sei wie in der Vorlesung definiert, also: $(f \circ g)(\vec{n}) = f(g(\vec{n}))$

Lösung:

Zunächst **(kein Bestandteil der eigentlichen Lösung!)** der Beweis, dass c^k_s primitiv rekursiv ist:

Fall 1: $k > 1$**:** $c^k_s(n_1, \ldots, n_k) = c^1_s(\pi^k_1(n_1, \ldots, n_k))$

Damit: $c^k_s = c^1_s \circ \pi^k_1$ für $k > 1$.

Fall 2: $k = 1$**:**

$$\begin{array}{lcccl} c^1_s(0) & = & s & = & c^0_s() \\ c^1_s(m+1) & = & s & = & \pi^2_2(m, c^1_s(m)) \end{array}$$

Damit: $c^1_s = \mathcal{PR}[c^0_s, \pi^2_2]$

Fall 3: $k = 0$**:** $c^0_s = \underbrace{(+1) \circ \cdots \circ (+1)}_{s} \circ 0$

Jetzt die eigentliche Lösung:

1. Für $f : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f(n, m) = c^2_{20}(n, m) \cdot \pi^2_1(n, m) + \pi^2_2(n, m) = 20n + m$$

2. Für $g : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ gilt:

$$g(n, m) = h(\pi^2_1(n, m) \dot{-} 1, \pi^2_2(n, m)) = h(n \dot{-} 1, m)$$

mit:

$$\begin{array}{lcccl} h(n, 0) & = & c^1_1(n) & = & 1 \\ h(n, m+1) & = & \pi^3_1(n, m, h(n, m)) \cdot \pi^3_3(n, m, h(n, m)) & = & n \cdot h(n, m) \end{array}$$

Damit gilt für $m \geq 1$:

$$h(n, m) = n \cdot h(n, m-1) = \cdots = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{m} \cdot h(n, 0) = n^m \cdot 1 = n^m$$

Außerdem ist $h(n, 0) = 1 = n^0$.

Folglich gilt: $g(n, m) = h(n \dot{-} 1, m) = (n \dot{-} 1)^m$