Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Theoretische Informatik II
Wintersemester 2007/2008
4. Aufgabenblatt

Ausgabe: 20. 11. 2007 Besprechung: 28. 11. 2007

---

1 Primitiv rekursive Funktionen

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

1. $\max : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\max(x,y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\operatorname{div} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\operatorname{div}(x,y) = \begin{cases} x+1, & y = 0 \\ \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\operatorname{mod} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\operatorname{mod}(x,y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ x \bmod y & \text{sonst} \end{cases}$

Dabei gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor := \max \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$ („floor x")
Sie dürfen alle Funktionen verwenden, von denen in der Vorlesung oder auf einem Aufgabenblatt schon bewiesen wurde, dass sie primitiv rekursiv sind.

Lösung:

In [Erk und Priese, 2000, S. 260] wird der *beschränkte μ-Operator* wie folgt definiert:

$$\mu_{i<m} i(g(\vec{n}, i) = 0) := \begin{cases} i_0, & \text{falls } g(\vec{n}, i_0) = 0 \wedge \forall j < i_0\, (g(\vec{n}, j) \neq 0) \wedge \\ & 0 \leq i_0 < m \\ 0, & \text{falls } g(\vec{n}, j) \neq 0 \ \forall j \text{ mit } 0 \leq j < m \text{ oder} \\ & m = 0 \end{cases}$$

Wenn die Funktion $g : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ primitiv rekursiv ist, dann auch $f : \mathbb{N}_0^{k+1} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(\vec{n}, m) = \mu_{i<m} i(g(\vec{n}, i) = 0)$ (Beweis ebenfalls in [Erk und Priese, 2000, S. 260]).
Folglich kann der beschränkte μ-Operator für die Lösungen verwendet werden.

max max ist mittels Fallunterscheidung definiert und daher primitiv rekursiv:

$$\max(x,y) = \begin{cases} \pi_1^2(x,y), & \text{falls } (x < y) = 0 \\ \pi_2^2(x,y), & \text{falls } (x \geq y) = 0 \end{cases}$$

Damit: $\max(x,y) = \pi_1^2(x,y) \cdot \operatorname{not}(x < y) + \pi_2^2(x,y) \cdot \operatorname{not}(x \geq y)$

Damit: $\max = + \circ (* \circ (\pi_1^2, \operatorname{not} \circ <), * \circ (\pi_2^2, \operatorname{not} \circ \geq))$

Es bleibt noch zu zeigen, dass not, $<$ und $\geq$ primitiv rekursiv sind:

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{not}(x) & = & 1 \dot{-} x & = & c_1^1(x) \dot{-} x \\ (x > y) & = & (x \dot{-} y \neq 0) & = & \mathrm{not}(\mathrm{not}(x \dot{-} y)) \\ (x < y) & = & (y > x) & = & (\pi_2^2(x,y) > \pi_1^2(x,y)) \\ (x \geq y) & = & \mathrm{not}(x < y) & & \end{array}$$

In der Lösung zu Blatt 3 wurde bewiesen, dass c_s^k primitiv rekursiv ist.

Eine deutlich kürzere Lösung stammt von Viktor Seib:

$$\max(x,y) = y + (x \dot{-} y) = \pi_2^2(x,y) + (x \dot{-} y)$$

Damit: $\max = + \circ (\pi_2^2, \dot{-})$

div Für $y \neq 0$ gilt:

$\mathrm{div}(x,y) = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor = \min\{i \in \mathbb{N}_0 \,|\, (i+1) \cdot y > x\} = \min\{i < x+1 \,|\, x < (i+1) \cdot y\} = \min\{i < x+1 \,|\, (x \geq (i+1) \cdot y) = 0\}$

Nach Definition des beschränkten μ-Operators brauchen wir die Schranke m als zusätzliches letztes Argument. Darum: Def. $f_1 : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$ wie folgt:

- Für $y \neq 0$:

  $$\begin{array}{l} f_1(x,y,m) = \min\{i < m \,|\, (x \geq (+1)(i) \cdot y) = 0\} = \\ \min\{i < m \,|\, (\pi_1^3(x,y,i) \geq (+1)(\pi_3^3(x,y,i)) \cdot \pi_2^3(x,y,i)) = 0\} = \\ \mu_{i<m} i((\pi_1^3(x,y,i) \geq (+1)(\pi_3^3(x,y,i)) \cdot \pi_2^3(x,y,i)) = 0) \end{array}$$

- Für $y = 0$: $f_1(x,y,m) = m = \pi_3^3(x,y,m)$

Damit:

$$f_1(x,y,m) = \begin{cases} \mu_{i<m} i((\pi_1^3(x,y,i) \geq (+1)(\pi_3^3(x,y,i)) \cdot \pi_2^3(x,y,i)) = 0), & \text{falls } (y=0) = 0 \\ \pi_3^3(x,y,m), & \text{falls } (y \neq 0) = 0 \end{cases}$$

Damit:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y,m) & = & \mu_{i<m} i((\pi_1^3(x,y,i) \geq (+1)(\pi_3^3(x,y,i)) \cdot \pi_2^3(x,y,i)) = 0) \cdot \mathrm{not}(y=0) + \\ & & \pi_3^3(x,y,m) \cdot \mathrm{not}(y \neq 0) \end{array}$$

Als Kurzschreibweise können wir μ_b einführen (b für „beschränkt“ oder „bounded“):

$$\begin{array}{l} f_1 = + \circ \Big(* \circ \Big(\mu_b(\geq \circ (\pi_1^3, * \circ ((+1) \circ \pi_3^3, \pi_2^3))), \mathrm{not} \circ = \circ (\pi_2^3, c_0^3) \Big), \\ \qquad * \circ \Big(\pi_3^3, \mathrm{not} \circ \neq \circ (\pi_2^3, c_0^3) \Big) \Big) \end{array}$$

Weiter: $\mathrm{div}(x,y) = f_1(x,y,x+1) \Rightarrow \mathrm{div} = f_1 \circ (\pi_1^2, \pi_2^2, (+1) \circ \pi_1^2)$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $=$ und $\neq$ primitiv rekursiv sind:

$$\begin{array}{rcccl} (x \wedge y) & = & \mathrm{not}(\mathrm{not}(x \cdot y)) & & \\ (x = y) & = & (x \geq y \wedge y \geq x) & = & (x \geq y \wedge \pi_2^2(x,y) \geq \pi_1^2(x,y)) \\ (x \neq y) & = & \mathrm{not}(x = y) & & \end{array}$$

mod Für $y \neq 0$ gilt:

$$\mathrm{mod}(x,y) = x \bmod y = x \dot{-} \lfloor \tfrac{x}{y} \rfloor \cdot y = \pi_1^2(x,y) \dot{-} \mathrm{div}(x,y) \cdot \pi_2^2(x,y)$$

Diese Lösung ist auch für $y = 0$ richtig.

Damit: $\mathrm{mod} = \dot{-} \circ (\pi_1^2, * \circ (\mathrm{div}, \pi_2^2))$

Literatur

[Erk und Priese, 2000] Katrin Erk und Lutz Priese. *Theoretische Informatik — Eine umfassende Einführung*. Springer, Berlin, 2000.