Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Theoretische Informatik II
Wintersemester 2007/2008
5. Aufgabenblatt

Ausgabe: 28. 11. 2007 Besprechung: 05. 12. 2007

---

1 Primitiv rekursive Funktionen

Die Funktion $\mathrm{a} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(0) &= 1 \\ \mathrm{a}(1) &= 2 \\ \mathrm{a}(2) &= 4 \\ \forall n > 2\ (\mathrm{a}(n) &= \mathrm{a}(n-1) + \mathrm{a}(n-2) - \mathrm{a}(n-3)) \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass a primitiv rekursiv ist.
Sie dürfen alle Funktionen verwenden, von denen in der Vorlesung oder auf einem Aufgabenblatt schon bewiesen wurde, dass sie primitiv rekursiv sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Idee, die in der Übung am 28. 11. für fib (die Folge der Fibonacci-Zahlen) gezeigt wurde.

Lösung:

Die Hilfsfunktion $\mathrm{at} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ liefert die Gödelisierung eines Zahlentripels:

$$\mathrm{at}(n) = \begin{cases} \langle 1, 2, 4 \rangle, & \text{falls } n = 2 \\ \langle (\mathrm{at}(n-1))_2, (\mathrm{at}(n-1))_3, (\mathrm{at}(n-1))_3 + (\mathrm{at}(n-1))_2 - (\mathrm{at}(n-1))_1 \rangle, & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$\mathrm{at}(n)$ liefert $\langle \mathrm{a}(n-2), \mathrm{a}(n-1), \mathrm{a}(n) \rangle$. at könnte durch beliebige Definitionen für $n = 0$ und $n = 1$ total gemacht werden und wäre dann primitiv rekursiv. Damit ist auch a primitiv rekursiv:

$$\mathrm{a}(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2, & \text{falls } n = 1 \\ (\mathrm{at}(n))_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

2 μ-rekursive Funktionen 1

Beweisen Sie, dass die Funktion $\log : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0$ mit $\log(x, y) = \lfloor \log_x y \rfloor$ μ-rekursiv ist.
Sie dürfen alle Funktionen verwenden, von denen in der Vorlesung oder auf einem Aufgabenblatt schon bewiesen wurde, dass sie μ-rekursiv sind.

Lösung:

Wegen der Definitionslücken des Logarithmus gilt Folgendes:

$$\log(x, y) = \begin{cases} \lfloor \log_x y \rfloor, & \text{falls } x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 0 \\ \text{undef}, & \text{falls } x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 0$ gilt:

$$\log(x, y) = \lfloor \log_x y \rfloor = \min \{ i \mid x^{i+1} > y \} = \mu i((x^{i+1} \leq y) = 0)$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\log(x, y) = \begin{cases} \mu i((x^{i+1} \leq y) = 0), & \text{falls } x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge y \neq 0 \\ \text{undef}, & \text{falls } x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \end{cases}$$

3 μ-rekursive Funktionen 2

Welche Funktion f berechnet μc_1^2?

Lösung:

$f = \mu c_1^2$ bedeutet: $f(\vec{n}) = \mu i(c_1^2(\vec{n}, i) = 0)$ für alle $\vec{n} \in \mathbb{N}_0^k$. Damit ist klar, dass $k = 1$. Außerdem gilt $c_1^2(n, i) = 1 \neq 0$ für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \, (f(n) = \text{undef})$$