Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Theoretische Informatik II
Wintersemester 2007/2008
8. Aufgabenblatt

Ausgabe: 10. 01. 2008 Besprechung: 16. 01. 2008

---

1 λ-Kalkül 1

Im Folgenden bezeichnet $\overline{n}$ den λ-Term, der eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ repräsentiert.
In der Vorlesung wurde definiert: $*(\overline{n}, \overline{m}) =_{def} \overline{n}\ (\overline{m}\ succ)\ \overline{0}$

1. Berechnen Sie $*(\overline{2}, \overline{3})$.
2. Beweisen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $*(\overline{k}, \overline{n}) \equiv \overline{k \cdot n}$

Lösung:

Es wird vorausgesetzt, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $succ\ \overline{n} \equiv \overline{n+1}$

1.

$$
\begin{aligned}
&*(\overline{2}, \overline{3}) = \overline{2}\ (\overline{3}\ succ)\ \overline{0} = (\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^2\,x)\ (\overline{3}\ succ)\ \overline{0} \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,(\overline{3}\ succ)^2\ x)\ \overline{0} \rightarrow_\beta \\
&(\overline{3}\ succ)^2\ \overline{0} = ((\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^3\,x)\ succ)^2\ \overline{0} \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,succ^3\,x)^2\ \overline{0} = \\
&(\lambda x\,.\,succ^3\,x)\ ((\lambda x\,.\,succ^3\,x)\ \overline{0}) \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,succ^3\,x)\ (succ^3\ \overline{0}) \rightarrow_\beta^* \\
&(\lambda x\,.\,succ^3\,x)\ \overline{3} \rightarrow_\beta succ^3\ \overline{3} \rightarrow_\beta^* \overline{6}
\end{aligned}
$$

2. Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&*(\overline{k}, \overline{n}) = \overline{k}\ (\overline{n}\ succ)\ \overline{0} = (\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^k\,x)\ (\overline{n}\ succ)\ \overline{0} \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,(\overline{n}\ succ)^k\ x)\ \overline{0} \rightarrow_\beta \\
&(\overline{n}\ succ)^k\ \overline{0} = ((\lambda f\,.\,\lambda x\,.\,f^n\,x)\ succ)^k\ \overline{0} \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,succ^n\,x)^k\ \overline{0} = \\
&(\lambda x\,.\,succ^n\,x)^{k-1}\ ((\lambda x\,.\,succ^n\,x)\ \overline{0}) \rightarrow_\beta (\lambda x\,.\,succ^n\,x)^{k-1}\ (succ^n\ \overline{0}) \rightarrow_\beta^* \\
&(\lambda x\,.\,succ^n\,x)^{k-1}\ \overline{n} = (\lambda x\,.\,succ^n\,x)^{k-2}\ ((\lambda x\,.\,succ^n\,x)\ \overline{n}) \rightarrow_\beta^* \\
&(\lambda x\,.\,succ^n\,x)^{k-2}\ \overline{2 \cdot n} \rightarrow_\beta^* (\lambda x\,.\,succ^n\,x)^0\ \overline{k \cdot n} = \overline{k \cdot n}
\end{aligned}
$$

2 λ-Kalkül 2

Finden Sie einen λ-Term *pred*, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$pred\ \overline{n} \equiv \begin{cases} \overline{0}, & \overline{n} \equiv \overline{0} \\ \overline{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Definieren Sie eine Funktion, die die Repräsentation eines Zahlenpaars liefert. Verwenden Sie diese Funktion, um *pred* zu definieren.

Lösung:

$pairsucc\ (mkpair(\overline{k}, \overline{n}))$ liefert $mkpair(\overline{n}, \overline{n+1})$:

$$pairsucc =_{def} \lambda p\ .\ mkpair(snd(p), succ\ (snd(p)))$$

Damit kann *pred* definiert werden: *pairsucc* wird n-mal auf $mkpair(\overline{0}, \overline{0})$ angewandt, und vom so entstandenen Paar $mkpair(\overline{n \dot{-} 1}, \overline{n})$ wird das erste Element ausgewählt.

$$pred =_{def} \lambda n\ .\ fst(n\ pairsucc\ (mkpair(\overline{0}, \overline{0})))$$