

Theoretische Informatik II

Wintersemester 2007/2008

9. Aufgabenblatt

Ausgabe: 18. 01. 2008

Besprechung: 23. 01. 2008

1 λ -Kalkül 1

Im Folgenden bezeichnet \bar{n} den λ -Term, der eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ repräsentiert.

1. Geben Sie einen λ -Term pwr an, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$pwr \bar{m} \bar{n} \equiv \bar{m}^n$$

2. Geben Sie einen λ -Term fib an, so dass gilt:

$$fib \bar{0} \equiv \bar{1}$$

$$fib \bar{1} \equiv \bar{1}$$

$$\forall n > 1 : fib \bar{n} \equiv fib \overline{n-1} + fib \overline{n-2}$$

Sie dürfen alle λ -Terme verwenden, die bisher in der Vorlesung oder auf einem Aufgabenblatt definiert wurden — auch den Fixpunkt-Kombinator Y .

Lösung:

1. $pwr : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ lässt sich folgendermaßen definieren:

$$pwr(m, n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ m \cdot pwr(m, n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Um pwr im λ -Kalkül mit dem Y -Kombinator auszudrücken, müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

- (a) Jedes Argument der Funktion (unter Beibehaltung der Reihenfolge) durch ein λ binden.
- (b) Den Funktionsnamen durch (z.B.) f ersetzen und durch ein λ binden; dieses λ wird das äußerste λ .
- (c) Y -Kombinator auf das Ergebnis anwenden.

Dadurch ergibt sich:

$$pwr =_{def} Y (\lambda f . \lambda m . \lambda n . if\ iszero\ n\ then\ \bar{1}\ else\ m * (f\ m\ (pred\ n)))$$

Dabei ist die Ersetzung von $n-1$ durch die modifizierte Vorgängerfunktion (die $n \div 1$ liefert) deshalb möglich, weil die Vorgängerfunktion nur auf $n \neq 0$ angewendet wird.

2. $fib : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ lässt sich folgendermaßen definieren:

$$fib(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \vee n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein allgemeines Gleichheitsprädikat wurde bisher im λ -Kalkül weder in der Vorlesung noch in der Übung definiert. Deshalb ersetzen wir $n = 0 \vee n = 1$ durch $iszero(pred\ n)$.

Es ergibt sich:

$$fib =_{def} Y(\lambda f . \lambda n . if\ iszero\ (pred\ n)\ then\ \bar{1}\ else\ f\ (pred\ n) + f\ (pred\ (pred\ n)))$$

2 λ -Kalkül 2

Welche Funktion berechnet der folgende λ -Term?

$$Y(\lambda f . \lambda m . \lambda n . if\ iszero\ n\ then\ m\ else\ succ\ (f\ m\ (pred\ n)))$$

Lösung:

Der fragliche λ -Term heiße g .

Um g ohne Y -Kombinator auszudrücken, müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Y -Kombinator entfernen.
2. Äußerstes λ (hier λf) entfernen; bisher von diesem λ gebundene Variablenvorkommen durch Namen der Funktion (hier g) ersetzen.
3. Jetzt äußerste λ (hier λm und λn) entfernen; bisher von diesen λ gebundene Variablen (unter Beibehaltung der Reihenfolge) zu Argumenten der Funktion machen.

Das Ergebnis:

$$g(m, n) = \begin{cases} m, & n = 0 \\ g(m, n-1) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Ersetzung der modifizierten Vorgängerfunktion durch $n-1$: s.o.

Iterativ:

$$g(m, n) = g(m, n-1) + 1 = g(m, n-2) + 1 + 1 = \dots = g(m, 0) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = m + n$$

Der fragliche λ -Term berechnet also $g : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $g(m, n) = m + n$.